ΑΣΚΗΣΕΙΣ Ι - ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Α. Αριθμήσιμα – Υπεραριθμήσιμα σύνολα

1. Κάθε άπειρο σύνολο περιέχει ένα αριθμήσιμο (άπειρο) υποσύνολο.
2. Κάθε άπειρο σύνολο A περιέχει ένα γνήσιο υποσύνολο ισοπληθικό του. [Υπόδ. $A \sim A \setminus \{x\}$, $x \in A$].
3. $[\alpha,\beta] \sim (\alpha,\beta] \sim [\alpha,\beta) \sim (\alpha,\beta) \sim \mathbb{R}$.
4. Το σύνολο όλων των πολυωνύμων $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ με ακεραίους (αντ. ρητούς) συντελεστές είναι αριθμήσιμο. Συμπεράνατε ότι το σύνολο των αλγεβρικών αριθμών είναι αριθμήσιμο. (Σημείωση. Αλγεβρικός αριθμός είναι ένας αριθμός που είναι ρίζα μιας πολυωνυμικής εξίσωσης, $a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$, με ακεραίους συντελεστές).
5. Αν $f:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ μονότονη συνάρτηση, τότε το σύνολο $A(f)$ των σημείων ασυνεχείας της f είναι αριθμήσιμο.
6. Έστω $E \subset (0,+\infty)$ τέτοιο ώστε κάθε σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, με x_n διακεκριμένα στοιχεία από το E, συγκλίνει. Αποδείξτε ότι το E είναι αριθμήσιμο.
7. Το σύνολο Cantor C είναι υπεραριθμήσιμο.
8. Έστω X το σύνολο όλων των ακολουθιών $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ με $x_n = 0$ ή 1, $n = 1,2,\ldots$. Αποδείξτε ότι το X είναι υπεραριθμήσιμο.

Β. Μετρικοί Χώροι

1. Έστω d_1, d_2 δύο μετρικές στο ίδιο μη κενό σύνολο X. Εξετάστε αν (i) $d_1 + d_2$, (ii) $\max\{d_1, d_2\}$, (iii) $\min\{d_1, d_2\}$ και (iv) d^2, είναι επίσης μερικές στο X.
2. Εξετάστε αν οι $\rho(x,y) = |x^2 - y^2|$, $\sigma(x,y) = (x-y)^2$, $\tau(x,y) = |x - 2y|$, $d_1(x,y) = \sqrt{|x-y|}$ και $d_2(x,y) = \dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}$ ορίζουν μετρικές στο $\mathbb{R}$.
3. Έστω $f: X \to \mathbb{R}$ (X σύνολο) μια 1-1 συνάρτηση. Αποδείξτε ότι $\rho(x,y) = |f(x) - f(y)|$ ορίζει μια μετρική στο X.

   Εφαρμογές: i) Αν $X = (0,1)$ ή $(0,+\infty)$ και $f(x) = x, \dfrac{1}{x}$ ή $\ell n x$, (ii) $X = \mathbb{R}$ και $f(x) = \tau o\xi\, \varepsilon\varphi\, x$ ή $\sqrt[3]{x}$, ή x^3.
4. Αν (X,d) μ.χ. εξετάστε αν οι παρακάτω:

   i) $d_1 = \dfrac{d}{1+d}$, ii) $d_2 = \ell n(1+d)$, (iii) $d_3 = d^a$ $(0 < a \le 1)$ και (iv) $d_4 = \min\{1, d\}$

είναι επίσης μετρικές στο X.

5. (α) Έστω $\varphi : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ αύξουσα συνάρτηση και τέτοια ώστε (i) $\varphi(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$, και (ii) $\varphi(t+s) \le \varphi(t) + \varphi(s)$ για κάθε $t, s \ge 0$ (υποπροσθετικότητα). Αποδείξτε ότι αν d είναι μια μετρική σ' ένα μη κενό σύνολο X τότε $\varphi \circ d$ είναι επίσης μια μετρική στο X.

(β) Αποδείξτε ότι κάθε μία από τις παρακάτω ιδιότητες για την φ είναι ικανή στο να συμπεράνουμε την υποπροσθετικότητα της φ.

(i) η φ είναι δυο φορές διαφορίσιμη και $\varphi'' \le 0$

(ii) η φ είναι διαφορίσιμη και φ' είναι φθίνουσα, και

(iii) $\dfrac{\varphi(x)}{x}$ είναι φθίνουσα για $x > 0$.

6. Αποδείξτε την Άσκηση 4 χρησιμοποιώντας την Άσκηση 5.

7. Έστω (X,d) μετρικός χώρος και $A = \{a > 0 : d^a$ είναι μετρική στο $X\}$. Αποδείξτε ότι το A είναι ένα διάστημα στο $(0,+\infty)$.

8. Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\alpha < \beta$, $X = \{f : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$, υπάρχει η f' και είναι συνεχής$\}$ και $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ με $\rho(f,g) = \sup\{|f'(x) - g'(x)| : x \in [\alpha,\beta]\} + |f(\beta) - g(\beta)|$. Τότε η ρ είναι μετρική στο X.

9. Έστω $R[\alpha,\beta]$ (αντ. $C[\alpha,\beta]$) το σύνολο όλων των Rieman ολοκληρωσίμων (αντ. συνεχών) πραγματικών συναρτήσεων στο $[\alpha,\beta]$. Εξετάστε αν οι ρ, σ, τ, d παρακάτω είναι μετρικές στο $R[\alpha,\beta]$, $C[\alpha,\beta]$.

$$\rho(f,g) = \sup_{\alpha \le x \le \beta} |f(x) - g(x)|,$$

$$\tau(f,g) = \int_\alpha^\beta |f - g|,$$

$$\sigma(f,g) = \left[\int_\beta^\alpha |f - g|^2 \right]^{1/2}, \text{ και}$$

$$d(f,g) = \left[\int_\beta^\alpha |f - g|^p \right]^{1/p}, \quad p \ge 1, \quad f, g \in R[\alpha,\beta].$$

10. **(*)** Έστω X το σύνολο όλων των ακολουθιών $x = (x_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ με $x_n = 0$ ή 1, $n = 1, 2, \ldots$. Αν $x = (x_n)$ και $y = (y_n)$, θέτουμε $d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |x_n - y_n|$. Αποδείξτε ότι η d είναι μετρική στο X.

11. **(*)** (Κύβος του Hilbert). Έστω H^∞ το σύνολο όλων των πραγματικών ακολουθιών $x = (x_n)$ με $|x_n| \le 1$ $\forall n$.

(i) Αποδείξτε ότι $d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |x_n - y_n|$ ορίζει μια μετρική στο H^∞.

(ii) Για $x, y \in H^{\infty}$ και $k \in \mathbb{N}$ θέτουμε, $M_k = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \ldots, |x_k - y_k|\}$.

Αποδείξτε ότι $2^{-k} M_k \le d(x, y) \le M_k + 2^{-k}$.

12. (*) Έστω X το σύνολο όλων των πραγματικών ακολουθιών. Για $x = (x_n)$ και $y = (y_n)$ θέτουμε $d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}$. Αποδείξτε ότι (X, d) είναι μετρικός χώρος.

13. (*) Έστω X το σύνολο όλων των ακολουθιών (a_n) φυσικών αριθμών. Για $\alpha = (\alpha_n)$, $\beta = (\beta_n)$ στο X θέτουμε,

$$\rho(\alpha, \beta) = 0, \text{ αν } \alpha = \beta$$

$$\rho(\alpha, \beta) = \frac{1}{n}, \text{ αν } \alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \ldots, \alpha_{n-1} = \beta_{n-1} \text{ και } \alpha_n \ne \beta_n.$$

Αποδείξτε ότι (X, ρ) είναι μετρικός χώρος.

14. (*) Έστω $X = \mathbb{R}^2$ με $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$, $x = (x_1, x_2)$ και $y = (y_1, y_2)$ (η Ευκλείδεια μετρική στο $\mathbb{R}^2$). Έστω

$$D = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \le 1\}$$

Θέτουμε $\rho : D \times D \to \mathbb{R}$ ως εξής

$$\rho(z, w) = \begin{cases} d(z, w), \text{ αν } z, w \text{ βρίσκονται στην ίδια ακτίνα} \\ d(z, 0) + d(w, 0), \quad \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι η ρ είναι μια μετρική στο D.