

Ασκήσεις σε δύνεις διπατα:

1. (a) Τοιδί αυτό τα μαθηματικά υποστήριξα του \mathbb{R} .
 $\left\{ n + \frac{1}{m} : n, m \text{ ανέπαροι}, m \neq 0 \right\}, \left\{ x \in \mathbb{R} : x - \sqrt{2} \in \mathbb{Q} \right\}$ και $\left\{ x \in \mathbb{R} : x^3 \notin \mathbb{Q} \right\}$ είναι ουντικά στο \mathbb{R} ; (*)
(b) Εάν (X, ρ) διαμετρικός μ.χ. Αποδείξτε ότι
 $\circ (X, \rho)$ είναι χαμηλός μ.χ. Άντρας δείχνει περιονή στο X λεπτίραν με την ρ , είναι τότε ότι $\circ (X, d)$ χαμηλός μ.χ.;
2. (a) Έστω $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$, $E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2} \right) \notin D \right\}$ και $X = D \cup E$.
Τοιδί αυτό τα μαθηματικά D , E και X του \mathbb{R}^2
είναι συμεταγόνια; Είναι n ουντικήν $f: X \rightarrow \mathbb{R}$
με $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } (x, y) \in D \\ 1, & \text{αν } (x, y) \in E \end{cases}$ ορθοίμορφα συντεταγμένα; (*)
(b) Τοιδί είναι n ουντική συμεταγόνια
χαμηλός μ.χ.;
3. Έστω (X, ρ) μ.χ. και $A, B \subseteq X$. Αποδείξτε ότι:
(a) $d(A, B) = d(\bar{A}, \bar{B})$ (όως $d(A, B)$ ή ανέβαση
των A και B), και
(b) αν τα A και B είναι συμεταγόνια, τότε να
 $\alpha \in A$ και $\beta \in B$ ιστορεί $d(A, B) = \rho(\alpha, \beta)$.

(*) Στα διπατα 1(a) και 2(a) δικαιολογήστε
τις αστρικές σας κυριότητες αποδίζοντας στην
διπατα.

4. Έστω X μ.χ., $A \subseteq X$ παν νέροι και $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ τέλος $f(x) = d(x, A)$ για κάθε $x \in X$.
- (a) Αποδίξει ότι f είναι συνεχής.
- (b) Αποδίξει ότι το σύνολο $\{x \in X : d(x, A) \leq 1\}$ είναι ημίσημό στο X .

5. Έστω X μ.χ. Αποδίξει ότι τα εξής είναι ισοδιάφορα:

- (i) Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει ανορθία (x_n) στο X τούτη $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} S(x_n, \epsilon)$, και
- (ii) ο X είναι διαχωριστός.

[Υποδ. Για την πια να είναι διαχωριστός, διαπιστώσεις την απόδιξη ότι κάθε σημείο της ημίσημης έχει καρέκλα μ.χ. είναι διαχωριστός.]

6. (a) Αν K_1 και K_2 είναι νεοσινηγόρα ενός μ.χ. X και το K_1 να είναι ημίσημό και K_2 συμπλήρωμα του το σύνολο $K_1 \cap K_2$ είναι συμπλήρωμα.
- (b) Διαπιστώσει το δείπνη του Dini. Διατί οι παραδίγματα που να δικτύων δια τον τόπο η νότια συμπλήρωμας δέν περιπούν να παραγγελθούν.

Θα ζητούσει αναπτύξεις και αποδοχές.