ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2003

Θέμα 1ο: Α) Διατυπώστε ισοδύναμους χαρακτηρισμούς των συμπαγών υποσυνόλων του IR^{κ}. Β) Ποια από τα επόμενα σύνολα είναι συμπαγή; i) $\{(x,y) \in IR^2 : |x| \le 1\}$, ii) $\{x \in IR^{\kappa} : \|x\| \le 3\}$, iii) $\{x \in IR^{\kappa} : 1 \le \|x\| \le 2\}$, v) $Z \rangle Z$ στο IR^2 iv) ένα πεπερασμένο υποσύνολο του IR^{κ}, v) $\{x \in IR^{\kappa} : \|x\| = 1\}$, vi) η περίμετρος του μοναδιαίου τετραγώνου στο IR^2, iiv) οι ρητοί στο $[0,1]$, iiiv) ένα κλειστό υποσύνολο του $[0,1]$.

Θέμα 2ο: Α) Δίνεται η ακολουθία $y_n = (\sqrt[n]{n}, (1+\frac{1}{n})^n, \frac{1}{2^n})$, $n \ge 1$, στο IR^3. Είναι η y_n συγκλίνουσα και αν ναι ποιο είναι το όριο της; Β) Έστω $(x_n) \subseteq IR^4$ ώστε $\|x_{n+1} - x_n\| \le \frac{1}{\sqrt{n^3}}$, $n \ge 1$. Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι συγκλίνουσα.

Θέμα 3ο: Α) Αν η συνάρτηση $f:(X,d) \to (Y,\rho)$ είναι συνεχής και ο (X,d) είναι συμπαγής χώρος, δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής και φραγμένη. Β) Έστω (X,d) μετρικός χώρος και $\phi \ne A \subseteq X$. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = d(x,A), x \in X$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Θέμα 4ο: Έστω (x_n) είναι μια συγκλίνουσα ακολουθία στον IR^{κ} με $x_n \to x$ και έστω $A_n\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$. Δείξτε ότι $\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n$. Είναι η πρόταση αυτή αληθής σε τυχόντα μετρικό χώρο;

Θέμα 5ο: Α) Ελέγξτε ως προς την ισοσυνέχεια την ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$. Έχει η συγκλίνουσα υπακολουθία στον χώρο $c[0,1]$ ως προς την supremum – νόρμα ; Β) Είναι το σύνολο $\{f \in c[0,1] : \|f\| \le 1\}$ συμπαγές;

Θέμα 6ο: Έστω (X,d) συμπαγής χώρος και $f: X \to X$ συνάρτηση με $d(f(x), f(y)) < d(x,y)$, $x \ne y$. Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής και έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο.

ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2001

Θέμα 1ο: i) Έστω Χ διακριτικός μ.χ. Αν Y μ.χ. δείξτε ότι η $f:\mathrm{X}\to\Psi$ είναι συνεχής. ii) Έστω η R με την συνήθη απόσταση. Αν ο Χ είναι μ.χ.: κάθε $f:\mathrm{X}\to R$ να είναι συνεχής δείξτε ότι ο Χ είναι διακριτός μ.χ. iii) Έστω Χ συμπαγής μ.χ. και $f:\mathrm{X}\xrightarrow{1-1}Y$ συνεχής, επί και αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση. Αποδείξτε ότι: α) η f είναι κλειστή απεικόνιση και β) θα είναι ομοιομορφισμός .

Θέμα 2ο: i) Έστω Χ μ.χ. Υποθέτουμε ότι εν Χ κάθε οικογένεια $(F_i)_{i\in I}$ κλειστών συνόλων: $\cap F_i=\emptyset$ έχει μία πεπερασμένη θ_{n_0} οικογένεια της οποίας η τομή είναι $\emptyset$. Δείξτε ότι ο μ.χ. Χ είναι συμπαγής. ii) Ποια από τα σύνολα $[0,1],(0,1],\{1,2,3,4\},Z,Q\cap[0,1],Q\cap(0,\sqrt{2})$ είναι συμπαγή εν R με την συνήθη απόσταση; (πλήρως δικαιολογημένη απάντηση). iii) Αν ο Χ είναι διακριτός μ.χ. δείξτε ότι δεν περιέχει άπειρα υποσύνολα τα οποία να είναι συμπαγή iv) Αν Y_1,Y_2 είναι υποσύνολα του μ.χ. Χ έτσι ώστε το Y_1 να είναι κλειστό και το Y_2 να είναι συμπαγές δείξτε ότι το $Y_1\cap Y_2$ είναι συμπαγές. v) Δείξτε ότι κάθε ακολουθία Cauchy(α_n), σ' ένα μετρικό χώρο Χ, είναι ολικά φραγμένη.

Θέμα 3ο: Έστω σαν Χ, Y μ.χ. και $f,g:\mathrm{X}\to Y$ συνεχείς. Δείξτε ότι i) Το σύνολο $C_\tau=\{x\in X:f(x)=g(x)\}$ είναι κλειστό εν Χ και αν $\Psi=R$ τότε και το $\{x\in X:f(x)\le g(x)\}$ είναι κλειστό. ii) Αν το σύνολο Α είναι παντού εν Χ δείξτε ότι αν $\alpha\in\mathrm{A}:f(\alpha)=g(\alpha)$ τότε $f=g$. iii) Να δείξετε ότι το διάγραμμα της f, $Gr(f)=\{(x,f(x)):x\in X\}$ είναι κλειστό. Ισχύει το αντίστροφο; iv) Το διάγραμμα της f, είναι ομοιόμορφο με τον μ.χ. Χ.

Θέμα 4ο: i) Αν ο μ.χ. $\langle\mathrm{X},d\rangle$ είναι πλήρης μ.χ. είναι επίσης πλήρης για την απόσταση $e(x,\psi)=\min\{1,d(x,\psi)\}$; ii) Έστω σαν ρ,σ δύο αποστάσεις επί του Χ: $\rho(x,\psi)\le\kappa\sigma(x,\psi)$, $\sigma(x,\psi)\le l\rho(x,\psi)$ $\kappa,l>0$. Δείξτε ότι αν ο $\langle\mathrm{X},\rho\rangle$ είναι πλήρης $\Leftrightarrow$ ο $\langle\mathrm{X},\rho\rangle$ είναι πλήρης. iii) Δείξτε ότι οι αποστάσεις d,e είναι ισοδύναμες $d\sim e$.

Θέμα 5ο: i) Έστω N πουθενά πυκνό (αραιό) σύνολο στον μ.χ. Χ. Δείξτε ότι $\overline{\ell N}$ είναι σύνολο πυκνό στον Χ. ii) Διατυπώστε το θεώρημα Baire και δείξτε (χρησιμοποιώντας το) ότι α) η R δεν είναι αριθμήσιμο σύνολο β) το Q είναι σύνολο πρώτης κατηγορίας iii) Διατυπώστε το θεώρημα Stone για πραγματικές και μιγαδικές συναρτήσεις και εξηγήστε λεπτομερώς γιατί αποτελεί γενίκευση του κλασικού (προσεγγιστικού) θεωρήματος Weierstrass.

ΙΟΥΝΙΟΣ 2001

Θέμα 1ο: i) Ένα $A \subseteq X$, X μ.χ. είναι ανοικτό $\Leftrightarrow$ αν παριστάνεται ως ένωση ανοικτών σφαιρών. ii) Κάθε πεπερασμένο σύνολο σ' ένα μ.χ. είναι κλειστό.

Θέμα 2ο: Αν $\langle X,\rho\rangle$ μ.χ. με την ιδιότητα: κάθε αριθμήσιμο $F \subseteq X$ είναι κλειστό, τότε η ρ είναι ισοδύναμη της διακριτής μετρικής ρ_σ $(\rho \sim \rho_\sigma)$.

Θέμα 3ο: i) Αν X μ.χ. και $A,B \subseteq X$ με $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$ να αποδειχθεί τότε ότι για το τυχόν $x \in X$ ισχύει $d(x,A) = d(x,B) = d(x,\overline{A})$. ii) Αν X μ.χ. $x \in X$, $r > 0$, να εξετασθεί τότε ποια σχέση υφίσταται μεταξύ των συνόλων $\overline{s(x,r)}$ (κλειστή θήκη της ανοικτής σφαίρας $s(x,r)$) και $\overline{s}(x,r)$ (κλειστή σφαίρα). Να δοθεί παράδειγμα ώστε η σχέση αυτή να είναι γνήσια.

Θέμα 4ο: Αν $\alpha,b \in R$ με $\alpha < b$, να εξετασθεί τότε αν είναι δυνατή η παράσταση $[\alpha,b] = \bigcup_{n\in N} A_n$ με $\overset{0}{\overline{A_n}} = \emptyset$ $\forall n \in N$.

Θέμα 5ο: Α) Αν $\langle x,\rho_1\rangle, \langle x,\rho_2\rangle$ μ.χ. αποδείξτε τότε πλήρως ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα: i) ρ_1 ισοδύναμη της ρ_2 $(\rho_1 \sim \rho_2)$ ii) η ταυτοτική απεικόνιση $i:\langle x,\rho_1\rangle \to \langle x,\rho_2\rangle$ είναι ομοιομορφισμός. iii) $\forall$ $(x_n)_{n\in N}$, $x_n \in X$, $x_0 \in X$ ισχύει $x_n \xrightarrow{\rho_1} x_0 \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{\rho_2} x_0$. Β) Αν $X = r_R([0,1])$, $\rho,\rho_1 : X \times X \to R$ μ.χ. $\rho(f,g) = \int_0^1 |f(t)-g(t)|dt$ και $\rho_1(f,g) = \max\{|f(t)-g(t)| : t \in [0,1]\}$ να εξετασθεί τότε αν οι ρ και ρ_1 είναι μετρικές και αν ναι, είναι ισοδύναμες;

Θέμα 6ο: i) Αποδείξτε ότι το CQ (άρρητοι) δεν είναι F_σ - σύνολο στο μ.χ. $\langle R,\rho_\sigma\rangle$. ii) Να εξετασθεί αν υπάρχει $F : R \to R$ συνεχής στο Q και ασυνεχής στο CQ.

Θέμα 7ο: Α) Έστω $\langle x,\rho\rangle$ συμπαγής μ.χ. και $f : x \to x$ με $\rho(f(x),f(\psi)) < \rho(x,\psi)$ για όλα $x \neq \psi$. Αποδείξτε ότι: i) η συνάρτηση $X \ni x \to \rho(f(x)x) \in R$, $\langle R,\rho_\sigma\rangle$ είναι συνεχής. ii) Υπάρχει $x_0 \in X$ ώστε να ισχύει: $\rho(f(x_0),x_0) = \inf\{\rho(f(x),x) : x \in X\}$. iii) Γι' αυτό το x_0 ισχύει $f(x_0) = x_0$ και είναι μοναδικό με αυτή την ιδιότητα. Β) Να δοθεί παράδειγμα ενός κλειστού και φραγμένου συνόλου ενός μ.χ. που δεν είναι συμπαγές.

Θέμα 8ο: i) Δίνονται $\langle X,\rho\rangle$ συμπαγής μ.χ., $f, f_n \in r_R(X)$ με $\{f_n : n \in N\}$ ισοσυνεχής και $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} f$ (κατά σημείο σύγκλιση). Να αποδειχθεί πλήρως ότι $f_n \xrightarrow{o.\sigma} f$ (ομοιόμορφη σύγκλιση). ii) Ισχύει το συμπέρασμα του (i) αν ο μ.χ. $\langle X,\rho\rangle$ δεν είναι συμπαγής;

Θέμα 9ο: i) Αν $X \subseteq R^n$, $n \in N$ είναι κλειστό και φραγμένο και $A \subseteq r_R(X)$ είναι άλγεβρα που διαχωρίζει τα σημεία του X και περιέχει μία f_1 με $f_1(x) = 1$, $\forall x \in X$, να αποδειχθεί τότε ότι $\overline{A} = r_R(X)$. ii) Να διατυπωθεί το θεώρημα Stone – Weierstrass για πραγματικές συναρτήσεις και εξηγείστε λεπτομερώς γιατί αποτελεί γενίκευση του κλασσικού (προσεγγιστικού) θεωρήματος Weierstrass.

Θέμα 10ο: Να εξετασθεί αν είναι ισοσυνεχής η $\{f_n : n \in N\} \subseteq r_R([0,1])$ μ.χ. $f_n(x) \dfrac{x}{x+(1-nx)^2}$.

ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2000

Θέμα 1ο: Α) Δείξτε ότι κάθε πλήρης υπόχωρος ενός μ.Χ. είναι κλειστός. Β) Έστω X μ.χ. και Ψ πυκνός υπόχωρος του X. Εξετάστε κατά πόσον ισχύει καθένας από τους παρακάτω ισχυρισμούς: i) Αν ο Ψ είναι φραγμένος τότε και ο X είναι φραγμένος. ii) Αν ο Ψ είναι διαχωρίσιμος τότε και ο X είναι διαχωρίσιμος. iii) Αν ο Ψ είναι πλήρης τότε και ο X είναι πλήρης.

Θέμα 2ο: Α) Έστω X και Ψ μ.χ. και $f: X \to \Psi$. Αποδείξτε πλήρως ότι η f είναι συνεχής $\Leftrightarrow$ για κάθε $f \subset \Psi$ κλειστό το $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό στο X. Β) Ποιοι από τους υπόχωρους του R: $[0,1),(-1,1)$ και R, είναι ομοιομορφικοί; (πλήρης αιτιολόγηση).

Θέμα 3ο: Α) Αποδείξτε ότι κάθε συμπαγής μ.χ. είναι διαχωρίσιμος. Β) Αν ρ_1 και ρ_2 είναι ισοδύναμες μετρικές σ' ένα σύνολο X, ώστε ο (X,ρ_1) να είναι συμπαγής (αντίστοιχα ολικά φραγμένος) μ.χ., είναι τότε και ο (X,ρ_2) συμπαγής (αντίστοιχα ολικά φραγμένος) μ.χ. ;

Θέμα 4ο: Α) Αποδείξτε ότι κάθε βασική ακολουθία σ' ένα μετρικό χώρο έχει το πολύ ένα σημείο συσσώρευσης. Β) Έστω X,Ψ μ.χ. και $f: X \to \Psi$ ομοιόμορφα συνεχής και επί. Αν ο X είναι ολικά φραγμένος τότε και ο Ψ είναι ολικά φραγμένος.

Θέμα 5ο: Α) Διατυπώστε το θεώρημα Cantor που χαρακτηρίζει τους πλήρεις μ.χ. Με τη βοήθεια αυτού αποδείξτε ότι αν ρ είναι μετρική στον R ισοδύναμη με την συνήθη ώστε ο (R,ρ) να είναι πλήρης, τότε υπάρχει $r>0$ ώστε $\delta([x,\infty)) \geq r$ για κάθε $x \in R$ (όπου $\delta([x,\infty))$ η διάμετρος του $[x,\infty)$ ως προς ρ).
Β) Έστω X μ.χ. $B(X)=\{f: X \to R, f$ φραγμένη$\}$ και $\rho(f,g)=\sup|f(x)-g(x)|$ $x \in X$ για κάθε $f,g \in B(X)$. Αποδείξτε πλήρως ότι το $C(X)=\{f \in B(X): f$ συνεχής$\}$ είναι κλειστό στο $B(X)$.

Θέμα 6ο: Α) Έστω X μ.χ. $f_n: X \to R$, $n=1,2,...$ ισοσυνεχής ακολουθία συναρτήσεων και $D \subset X$ πυκνό ώστε για κάθε $x \in D$ η $(f_n(x))_{n\in N}$ συγκλίνει. Αποδείξτε ότι η $(f_n)_{n\in N}$ συγκλίνει κατά σημείο. Β) Έστω $\varphi:[0,1] \to R$ συνεχής και 1-1 και $f:[0,1] \to R$ ώστε $\int_0^1 \varphi^n(x)f(x)dx=0$ για κάθε $n=0,1,...$ Να δείξετε ότι $f=0$.

ΙΟΥΝΙΟΣ 2000

Θέμα 1ο: Έστω (X, ρ_δ) διακριτός μ.χ. και $A \subset X$. Α) Εξετάστε πότε το A είναι πυκνό αραιό ή πρώτης κατηγορίας στο X και πότε ο μ.χ. (X, ρ_δ) είναι διαχωρίσιμος πλήρης ή συμπαγής (πλήρης αιτιολόγηση). Β) Αν ρ είναι μετρική στον X αποδείξτε ότι $\rho \sim \rho_\delta \Leftrightarrow$ κάθε αριθμήσιμο υποσύνολο του X είναι κλειστό στο X.

Θέμα 2ο: Α) Αν (x_n) είναι ακολουθία σ' ένα μ.χ. X και $x \in X$ ώστε κάθε υπακολουθία $(x_{\kappa n})$ της (x_n) έχει υπακολουθία $(x_{\lambda_{\kappa n}})$ με $x_{\lambda_{\kappa n}} \to x$ αποδείξτε ότι $x_n \to x$. Β) Έστω X μ.χ. Ψ συμπαγής μ.χ. και $f : X \to \Psi$. Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής $\Leftrightarrow$ το γράφημα $G_f : \{(x, f(x)) : x \in X\}$ της f είναι κλειστό στο $X \times \Psi$.

Θέμα 3ο: Α) Αποδείξτε ότι κάθε συμπαγής μ.χ. είναι ολικά φραγμένος και ότι κάθε ολικά φραγμένος μ.χ. είναι διαχωρίσιμος. Β) Δώστε παραδείγματα που να δείχνουν ότι τα αντίστροφα στο (Α) δεν ισχύουν.

Θέμα 4ο: Α) Έστω X (μη κενός) πλήρης μ.χ. και $A \subset X$ ώστε το A και το $X - A$ είναι πυκνά στο X. Αποδείξτε ότι τουλάχιστον ένα από τα A και $X - A$ δεν είναι F_σ στο X. Β) Χρησιμοποιώντας το (Α) αποδείξτε ότι το σύνολο των αρρήτων αριθμών δεν είναι F_σ στο R. Γ) Είναι η αριθμήσιμη τομή F_σ συνόλων, F_σ σύνολο;

Θέμα 5ο: Θεωρούμε τον μ.χ. $C([0,1])$ με την μετρική $\rho(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [0,1]\}$ και έστω $B = \{f \in C([0,1]) : |f(x)| \le 1$ για κάθε $x \in [0,1]\}$. Α) Δώστε παράδειγμα ακολουθίας (f_n) στο B η οποία συγκλίνει κατά σημείο στη μηδενική συνάρτηση, ώστε κάθε υπακολουθία $(f_{\kappa n})$ της (f_n) να μην συγκλίνει ομοιόμορφα στην μηδενική συνάρτηση. Β) Χρησιμοποιώντας το παράδειγμα του (Α) δείξτε ότι το υποσύνολο B του μ.χ. $C([0,1])$ δεν είναι συμπαγές. Γ) Τι συμπέρασμα προκύπτει από το παράδειγμα του (Α) σε σχέση με το θεώρημα του Dini (πλήρης αιτιολόγηση).

Θέμα 6ο: Α) Έστω X συμπαγής μ.χ. $f_n : X \to R$, $n = 1,2,\ldots$ ισοσυνεχής ακολουθία συναρτήσεων και $f : X \to R$ ώστε $f_n \to f$ κατά σημείο. Αποδείξτε πλήρως ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα. Β) Αν $f, g : [0,1] \to R$ είναι συνεχείς συναρτήσεις ώστε $\int_0^1 x^n f(x)dx = \int_0^1 x^n g(x)dx$ για κάθε $n = 0,2,4,\ldots$ Αποδείξτε ότι $f = g$.

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2000

Θέμα 1ο: Α) Έστω Χ,Υ μ.χ. και $f: X \to Y$ ομοιομορφισμός. Αποδείξτε πλήρως ότι $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ για κάθε $A \subset X$. Β) Έστω (Χ,ρ) μ.χ. και $A, B \subset X$ μη κενά. Αποδείξτε ότι: i) $d(A,B) = d(\overline{A}, \overline{B})$. ii) Αν τα Α και Β είναι συμπαγή, τότε υπάρχουν $x \in A$ και $y \in B$ ώστε $d(A,B) = \rho(x,y)$.

Θέμα 2ο: Έστω X μχ και $f: X \to R$ συνεχής συνάρτηση. Α) Αποδείξτε ότι το γράφημα της f είναι κλειστό υποσύνολο του $X \times R$. Β) Υποθέτουμε ότι για κάθε $A \subset X$ ανοιχτό μη κενό η 7/Α δεν είναι σταθερή συνάρτηση. Αποδείξτε ότι: i) $f(x) \subset f(x)$ ii) αν ο Χ είναι δεύτερης κατηγορίας, τότε το $f(x)$ είναι υπεραριθμήσιμο iii) αν ο Χ είναι συμπαγής, τότε το $f(x)$ είναι τέλειο σύνολο.

Θέμα 3ο: Να ορισθούν οι έννοιες του πλήρους, του συμπαγούς, του διαχωρισμού και του ολικά φραγμένου μετρικού χώρου. Ποια σχέση υπάρχει μεταξύ πλήρους μ.χ. και κάθε μιας από τις υπόλοιπες τρεις έννοιες; (αντιπαραδείγματα με πλήρη αιτιολόγηση ή αποδείξεις).

Θέμα 4ο: Α) Αποδείξτε ότι: i) κάθε ακολουθιακά συμπαγής μ.χ. είναι ολικά φραγμένος. ii) το γινόμενο δύο ακολουθιακά συμπαγών μ.χ. είναι ακολουθιακά συμπαγής μ.χ. Β) Αν $Y_n, n = 1,2,...,$ είναι ακολουθία συμπαγών υποσυνόλων του μ.χ. X, εξετάστε κατά πόσο οι υπόχωροι του $X, \bigcup_{n=1}^{m} Y_n, m = 1,2,....,$ και $, \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$ είναι πάντοτε συμπαγείς (αντιπαραδείγματα με πλήρη αιτιολόγηση ή αποδείξεις).

Θέμα 5ο: Α) Αποδείξτε ότι η αντίστροφη εικόνα μέσω συνεχούς συνάρτησης κάθε G_δ (αν. F_σ) συνόλου είναι G_δ (αν. F_σ) σύνολο. Β) Αποδείξτε ότι το ομοιόμορφο όριο ακολουθίας συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση. Γ) Έστω X μ.Χ. και $f_n : X \to R, n = 1,2,...,$ ακολουθία συνεχών συναρτήσεων και $f: X \to R$ ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του X. Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής.

Θέμα 6ο: Έστω $p_n : (0,1) \to R, n = 1,2,...,$ ακολουθία πολυωνύμων και $\phi : (0,1) \to R$. Α) Αν $p_n \to \phi$ ομοιόμορφα, αποδείξτε ότι η ϕ είναι ομοιόμορφα συνεχής και η ακολουθία (p_n) είναι ισοσκελές. Β) Αν $p_n \to \phi$ κατά σημείο, η (p_n) είναι φθίνουσα και η ϕ συνεχής και φραγμένη, ισχύει τότε $p_n \to \phi$ ομοιόμορφα;

ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 1999

Θέμα 1ο: Έστω (Χ,ρ) μ.χ. Να αποδείξετε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα: i) ρ~ρδ (όπου ρδ η διακριτή μετρική) ii) Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία στον Χ είναι τελικά σταθερή. iii) Χ'=Ø iv) κάθε αριθμήσιμο υποσύνολο του Χ είναι κλειστό.

Θέμα 2ο: i) Δείξτε ότι κάθε ισομετρία επί μεταξύ μ.χ. είναι ομοιομορφισμός. Ισχύει το αντίστροφο; ii) Δίδονται δύο ισομετρικοί (αντίστοιχα ομοιομορφικοί) μ.χ. Χ και Υ. Αν ο ένας είναι πλήρης είναι και ο άλλος; iii) Αποδείξτε ότι κάθε διακριτός μ.χ. είναι πλήρης.

Θέμα 3ο: i) Αποδείξτε ότι το σύνολο των ρητών δεν είναι Gδ στο . ii) Έστω Χ μ.χ. δεύτερης κατηγορίας και f:X→ συνεχής έτσι ώστε για κάθε V⊆X ανοιχτό (V≠Ø) ο περιορισμός $f|_V$ δεν είναι σταθερή συνάρτηση. Τότε το f(X) είναι υπεραριθμήσιμο.

Θέμα 4ο: Έστω (Χ,ρ) και (Υ,d) μ.χ. και f:X→Y. i) Αν η f είναι συνεχής και το F⊆X συμπαγές (αντίστοιχα πλήρες) εξετάστε το υποσύνολο f(F) του Υ ως προς την συμπάγεια και την πληρότητα. ii) Αν ∀A⊆X ισχύει $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$, αποδείξτε πλήρως είναι συνεχής.

Θέμα 5ο: Διατυπώστε το θεώρημα Stone-Weierstrass. Αποδείξτε πλήρως ότι αν Χ είναι συμπαγής μ.χ., τότε κάθε κλειστή υποάλγεβρα του (Χ) είναι σύνδεσμος.

Θέμα 6ο: Δώστε τον ορισμό της οικογένειας των *- μετρήσιμων συνόλων. Θεωρώντας γνωστό ότι η είναι άλγεβρα αποδείξτε ότι η είναι σ-άλγεβρα και ότι ο περιορισμός του * στην είναι πλήρες μέτρο.

ΙΟΥΝΙΟΣ 1999

Θέμα 1ο: Έστω (X,ρ) μ.χ., $A \subset X$ μη κενό και $\varphi : X \to R$ με $\varphi(x) = d(x,A)$ για κάθε $x \in X$ i) Αποδείξτε πλήρως ότι η φ είναι συνεχής συνάρτηση και ότι ισχύει $\overline{A} = \varphi^{-1}(\{0\})$ ii) χρησιμοποιώντας το (i), δείξτε ότι το $\overline{A}$ είναι κλειστό και G_δ σύνολο.

Θέμα 2ο: Έστω X και Ψ μ.χ., $f : X \to \Psi$ συνεχής και $D \subset X$ πυκνό. Εξετάστε κατά πόσο ισχύει καθένα από τους παρακάτω ισχυρισμούς: i) Αν η $F/_D$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, τότε και η F είναι ομοιόμορφα συνεχής ii) Αν η $F/_D$ είναι φραγμένη, τότε και η F είναι φραγμένη. iii) Αν η $F/_D$ είναι 1-1, τότε και η F είναι 1-1.

Θέμα 3ο: Αποδείξτε πλήρως ότι: i) Κάθε ακολουθιακά συμπαγής μ.χ. είναι ολικά φραγμένος. ii) Η κλειστή θήκη ολικά φραγμένου υποσυνόλου μ.χ. είναι ολικά φραγμένο σύνολο και iii) το καρτεσιανό γινόμενο δύο ακολουθιακά συμπαγών μ.χ. είναι ακολουθιακά συμπαγής μ.χ.

Θέμα 4ο: i) Έστω $B([0,1]) = \{f : [0,1] \to R, f$ φραγμένη$\}$ και $\rho(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [0,1]\}$, για κάθε $f,g \in B([0,1])$. Αποδείξτε ότι ο μ.χ. $(B([0,1]),\rho)$ είναι πλήρης. ii) Διατυπώστε το θεώρημα Cantor που χαρακτηρίζει τους πλήρεις μ.χ. χρησιμοποιώντας το θεώρημα αυτό αποδείξτε ότι ένας υπόχωρος πλήρους μ.χ. είναι πλήρης αν και μόνο αν είναι κλειστός.

Θέμα 5ο: Έστω (X,ρ) μ.χ. αποδείξτε ότι: i) Κάθε πεπερασμένη ένωση αραιών υποσυνόλων του X είναι αραιό σύνολο. ii) Κάθε πεπερασμένη τομή ανοικτών και πυκνών υποσυνόλων του X είναι πυκνό σύνολο. iii) Κάθε συνάρτηση $f : X \to R$ ώστε η $F/_A$ να είναι συνεχής για κάθε $A \subset X$ αριθμήσιμο είναι συνεχής.

Θέμα 6ο: Έστω X συμπαγής μ.χ., $f_n : X \to R$, $n = 1,2,...$ ακολουθία συνεχών συναρτήσεων και $f : X \to R$ ώστε $f_n \to f$ κατά σημείο αποδείξτε πλήρώς ότι η ακολουθία $(f_n)_{n\in N}$ είναι ισοσυνεχής $\Leftrightarrow$ $f_n \to f$ ομοιόμορφα.

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 1999

Θέμα 1ο: Έστω X και Ψ μ.χ. και $f: X \to \Psi$ συνάρτηση. Αποδείξτε ότι για τους παρακάτω ισχυρισμούς: i) η f είναι συνεχής. ii) Για κάθε $\psi \in \Psi$, το $f^{-1}(\{\psi\})$ είναι κλειστό στο X. iii) Το γράφημα της f είναι κλειστό στο $X \times \Psi$, ισχύουν: (i) $\Rightarrow$ (iii) και (iii) $\Rightarrow$ (ii). Να εξεταστεί κατά πόσον ισχύουν τα αντίστροφα.

Θέμα 2ο: Α) Έστω ρ_1, ρ_2 δύο μετρικές στο σύνολο X. Αποδείξτε πλήρως ότι τα εξής είναι ισοδύναμα: i) οι ρ_1 και ρ_2 είναι ισοδύναμες. ii) Η ταυτοτική συνάρτηση $i:(X,\rho_1) \to (X,\rho_2)$ είναι ομοιομορφισμός. iii) Για κάθε ακολουθία (x_n) στο X και $x_0 \in X$ ισχύει $x_n \xrightarrow{\rho_1} x_0 \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{\rho_2} x_0$.
Β) Έστω X τέλειος μ.χ. Αποδείξτε ότι: i) Κάθε αριθμήσιμο υποσύνολο του X είναι πρώτης κατηγορίας. ii) Αν ένα $A \subset X$ είναι πυκνό και G_δ, τότε το $X - A$ είναι πρώτης κατηγορίας. iii) Αν ο X περιέχει ένα υποσύνολο αριθμήσιμο πυκνό και G_δ, τότε ο X είναι πρώτης κατηγορίας.

Θέμα 3ο: Έστω X και Ψ μ.χ. και $f: X \to \Psi$. Αποδείξτε ότι:
Α) Αν ο X είναι συμπαγής και η f συνεχής, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.
Β) Τα εξής είναι ισοδύναμα: i) Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής. ii) Για κάθε ακολουθίες (x_n) και (ψ_n) στον X με $\rho_X(x_n, \psi_n) \to 0$ ισχύει $\rho_\Psi(f(x_n), f(\psi_n)) \to 0$. iii) Για κάθε αριθμήσιμο $A \subset X$, ο περιορισμός $f/_A$ της f στο A είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Θέμα 4ο: Α) Δώστε τον ορισμό του συμπαγούς συνόλου και αποδείξτε πλήρως ότι κάθε συμπαγές υποσύνολο μετρικού χώρου είναι κλειστό.
Β) Ποιοι από τους υπόχωρους του R: $[0,1), [0,\infty), \left\{\frac{1}{n} : n = 1,2,\ldots\right\}$ και $R - \{0\}$, περιέχουν κλειστά και φραγμένα υποσύνολα που δεν είναι συμπαγή; (πλήρης αιτιολόγηση)

Θέμα 5ο: Αποδείξτε ότι: Α) Κάθε συμπαγής μ.χ. είναι διαχωρίσιμος. Β) Η συνεχής εικόνα διαχωρίσιμου μ.χ. είναι διαχωρίσιμος. Γ) Το γινόμενο δύο διαχωρίσιμων μ.χ. είναι διαχωρίσιμος μ.χ.

Θέμα 6ο: Διατυπώστε και αποδείξτε το θεώρημα Dini και δώστε παράδειγμα που να δείχνει ότι η υπόθεση μονοτονίας είναι απαραίτητη.

Πραγματική Ανάλυση Ι

(19.4.05)

Εργασία

Επώνυμο: **Όνομα:** **Α.Μ.:**

Σε κάθε μία από τις παρακάτω δέκα ασκήσεις, ακριβώς μία από τις τέσσερις απαντήσεις είναι η σωστή. Σημειώστε με ένα x στο αντίστοιχο τετραγωνάκι την απάντηση που θεωρείτε σωστή. Σε ξεχωριστό χαρτί εξηγήστε (δίνοντας αποδείξεις ή αντιπαραδείγματα) γιατί αυτή είναι η σωστή απάντηση και γιατί οι υπόλοιπες τρεις απαντήσεις δεν ισχύουν. Γνωστές προτάσεις και θεωρήματα χρησιμοποιούνται χωρίς απόδειξη.

1. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ ώστε κάθε συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ συνεχής είναι ομοιόμορφα συνεχής. Τότε:

- ☐ Το A είναι συμπαγές.
- ☐ Το A δεν είναι κατ' ανάγκη κλειστό.
- ☐ Το A είναι φραγμένο.
- ☐ Το A είναι κλειστό στο $\mathbb{R}$ όχι κατ' ανάγκη φραγμένο.

2. Έστω $X = (\mathbb{R}, \rho)$, όπου ρ η διακριτή μετρική. Ποιά από τις παρακάτω συναρτήσεις $f : \mathbb{R}^2 \to X$ με $f(x,y) = x + y$, $g : X \to \mathbb{R}$ με $g(x) = \begin{cases} 1, & \alpha\nu\ x < 0 \\ 0, & \alpha\nu\ x \geq 0 \end{cases}$, και $h : \mathbb{R}^2 \to X$ με $h(x,y) = x$ (όπου οι μ.χ. $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}$ είναι εφοδιασμένοι με την Ευκλείδια μετρική) είναι συνεχής;

☐ καμία από τις f, g και h, ☐ η f, ☐ η g, ☐ η h.

3. Έστω (X, ρ) και (Y, d) μ.χ. και $f : X \to Y$. Η συνάρτηση f είναι συνεχής αν και μόνον αν

- ☐ Για κάθε $\varepsilon > 0$ και $x \in X$ υπάρχει $r > 0$ ώστε $\delta(f(S(x,r))) < \varepsilon$ (όπου $\delta(f(S(x,r)))$ η διάμετρος του $f(S(x,r))$).
- ☐ Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$ για κάθε $x, y \in X$ με $\rho(x,y) < \delta$.
- ☐ Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $d(f(x), f(y) < \delta$ για κάθε $x, y \in X$ με $\rho(x,y) < \varepsilon$ για κάθε $\varepsilon > 0$.
- ☐ Για κάθε ανοικτό σύνολο A στο X το σύνολο $f(A)$ είναι ανοικτό στο Y.

4. Για κάθε αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο $\{x_n : n = 1,2,\ldots\}$ του $\mathbb{R}$ ισχύει:

- ☐ Η ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι βασική.
- ☐ Τα σύνολα $\{x_{2n} : n = 1,2,,\ldots\}$ και $\{x_{2n+1} : n = 1,2,\ldots\}$ είναι επίσης πυκνά στο $\mathbb{R}$.
- ☐ $\{x_n : n = 1,2,\ldots\} \cap \mathbb{Q} \neq \varnothing$ (όπου $\mathbb{Q}$ το σύνολο των ρητών)..
- ☐ Το σύνολο $\{x_n : n \geq m\}$ είναι επίσης πυκνό στο $\mathbb{R}$ για κάθε $m = 1,2,\ldots$.

5. Σχετικά με τις έννοιες πλήρους, διαχωρίσιμου και συμπαγούς μ.χ. ισχύει:

- ☐ Κάθε πλήρης μ.χ. είναι διαχωρίσιμος
- ☐ Κάθε συμπαγής μ.χ. είναι διαχωρίσιμος και πλήρης.
- ☐ Κάθε διαχωρίσιμος μ.χ. είναι πλήρης.
- ☐ Κάθε πλήρης και διαχωρίσιμος μ.χ. είναι συμπαγής.

6. Έστω X μ.χ. Τότε:

- ☐ Κάθε κλειστό και φραγμένο υποσύνολό του είναι συμπαγές.
- ☐ Κάθε κλειστό και ολικά φραγμένο υποσύνολό του είναι συμπαγές.
- ☐ Κάθε συμπαγές υποσύνολό του είναι ολικά φραγμένο.
- ☐ Κάθε πλήρες και φραγμένο υποσύνολό του είναι συμπαγές.

7. Έστω (X,ρ) μ.χ. και (x_n) ακολουθία στο X. Τότε η (x_n) είναι βασική αν και μόνον αν

- ☐ Για κάθε $\varepsilon > 0$ και $x \in X$ υπάρχει $n_0 \in /N$ ώστε $x_n \in S(x,\varepsilon)$ για κάθε $n \geq n_0$.
- ☐ Η (x_n) συγκλίνει σε κάποιο $x \in X$.
- ☐ Υπάρχει υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n), η οποία συγκλίνει σε κάποιο $x \in X$.
- ☐ $\lim_n \delta(\{x_m : m \geq n\}) = 0$.

8. Ένας μ.χ. X είναι πλήρης αν και μόνο αν

- ☐ Κάθε ακολουθία στο X έχει υπακολουθία που συγκλίνει στο X.
- ☐ Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία στο X είναι βασική.
- ☐ Κάθε ακολουθία στο X έχει βασική υπακολουθία.
- ☐ Για κάθε φθίνουσα ακολουθία A_n, $n = 1,2,\ldots$, μη κενών υποσυνόλων του X με $\lim_n \delta(A_n) = 0$ ισχύει $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n \neq \varnothing$.

9. Έστω X μ.χ. και $f_n : X \to /R$, $n = 1,2,\ldots$, ακολουθία συνεχών συναρτήσεων, η οποία συγκλίνει κατά σημείο σε μια συνάρτηση $f : X \to /R$. Η f είναι συνεχής αν:

- ☐ Η ακολουθία $(f_n)_{n\in/N}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη (δηλ. υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f_n(x)| \leq M$ για κάθε $x \in X$ και $n = 1,2,\ldots$).
- ☐ Η ακολουθία $(f_n)_{n\in/N}$ είναι ισοσυνεχής.
- ☐ Κάθε f_n είναι ομοιόμορφα συνεχής.
- ☐ Κάθε f_n είναι συνάρτηση Lipschitz.

10. Έστω X μ.χ. και $f_n : X \to /R$, $n = 1,2,\ldots$ φθίνουσα ακολουθία συνεχών συναρτήσεων ώστε $\sup_{x\in X} f_n(x) = 1$ για κάθε $n = 1,2,\ldots$ και $\inf_n f_n(x) = 0$ για κάθε $x \in X$. Τότε:

- ☐ Κάποια από τις συναρτήσεις f_n δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.
- ☐ Ο μετρικός χώρος X δεν είναι πλήρης.
- ☐ Υπάρχει υπακολουθία της (f_n), η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα.
- ☐ Υπάρχει ένα ανοικτό κάλυμμα του X χωρίς πεπερασμένο υποκάλυμμα.

<u>Σημείωση</u>: Η εργασία αυτή είναι προαιρετική και πρέπει να επιστραφεί μέχρι 27.5.05 στη Γραμματεία του Τομέα Μαθηματικής Ανάλυσης (γραφείο 302). Θα ληφθεί υπ' όψιν μόνο στην εξέταση της 30.5.05 και εφ' όσον ο βαθμός της εξέτασης αυτής είναι μικρότερος από αυτό της εργασίας (20% εργασία + 80% εξέταση της 30.5.05).