Πραγματικ...

Απαντήστε σε 6 θέματα από τα 1–6 και Α ή σε θέματα από τα 1–6 και Β:

Θεω (X,d) μ.χ. και $\rho(x,y) = d(x,y)/(1+d(x,y))$ για κάθε $x,y \in X$. Αποδείξτε πλήρως ότι η ρ είναι μετρική στο X ισοδύναμη με τη d. [1,6]

2) Αν (X,d) είναι μ.χ. και $A \subseteq X$ μη κενό, αποδείξτε πλήρως ότι η συνάρτηση $f:(X,d) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = d(x,A)$ είναι συνάρτηση Lipschitz. (β) Αποδείξτε ότι κάθε συνάρτηση Lipschitz μεταξύ δύο μετρικών χώρων X και Y είναι ομοιόμορφα συνεχής και ότι η συνάρτηση $g:[0,1] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = \sqrt{x}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής αλλά όχι Lipschitz. [1,6]

Έστω $A = \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 2\}$ και $B = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 1\}$. Εξετάστε τις παρακάτω τρεις συναρτήσεις ως προς τη συνέχεια σε κάθε σημείο και ως προς την ομοιόμορφη συνέχεια.

(i) $f: A \cup B \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 0$, αν $x \in A$, και $f(x) = 1$, αν $x \in B$.

(ii) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g|_{A \cup B} = f$ και $g(x) = d(x,A)$, αν $x \in \mathbb{R} \setminus (A \cup B)$.

(iii) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $h|_{A \cup B} = f$ και $h(x) = (d(x,A))^{-1}$, αν $x \in \mathbb{R} \setminus (A \cup B)$. [1,8]

[Ένα σκίτσο μπορεί να βοηθήσει]

Έστω X και Y μ.χ. και $f: X \to Y$ συνεχής επί. Αν ο X είναι συμπαγής (αντ. διαχωρίσιμος), αποδείξτε ότι ο Y είναι συμπαγής (αντ. διαχωρίσιμος). [1,6]

Δώστε παραδείγματα (με πλήρη αιτιολόγηση) ενός πλήρους μ.χ. (X_1, ρ_1) και ενός διαχωρίσιμου μ.χ. (X_2, ρ_2) ώστε ο μ.χ. $(X_1 \times X_2, \rho)$ να μην είναι ούτε πλήρης ούτε διαχωρίσιμος, όπου η ρ δίνεται από $\rho((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \max\{\rho_1(x_1,y_1), \rho_2(x_2,y_2)\}$. [1,8]

Έστω (G_n) ακολουθία ανοιχτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ ώστε το σύνολο $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ να είναι αριθμήσιμο. Αποδείξτε ότι το A δεν είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$. [1,6]

Διατυπώστε το προσεγγιστικό θεώρημα Weierstrass και με τη βοήθεια αυτού αποδείξτε ότι αν αν $f, g: [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις με $f(x) < g(x)$ για κάθε $x \in [0,1]$, τότε υπάρχει πολυώνυμο p ώστε $f(x) < p(x) < g(x)$ για κάθε $x \in [0,1]$. [1,8]

3. (α) Έστω X μη κενό σύνολο και $\ell^\infty(X)$ ο διανυσματικός χώρος των φραγμένων συναρτήσεων $f: X \to \mathbb{R}$. Θεωρούμε τον $\ell^\infty(X)$ εφοδιασμένο με τη μετρική $d(f,g) = \|f-g\|_\infty$, όπου $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$. Αποδείξτε ότι ο $(\ell^\infty(X), d)$ είναι πλήρης μ.χ.

(β) Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό διάστημα $[-M, M]$, $M > 0$. Είναι η σύγκλιση της σειράς ομοιόμορφη στο $\mathbb{R}$; [1,8]