ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

ΙΟΥΝΙΟΣ 2001

Θέμα 1ο: i) Ένα $A \subseteq X$, X μ.χ. είναι ανοικτό $\Leftrightarrow$ αν παριστάνεται ως ένωση ανοικτών σφαιρών. ii) Κάθε πεπερασμένο σύνολο σ' ένα μ.χ. είναι κλειστό.

Θέμα 2ο: Αν $\langle X, \rho \rangle$ μ.χ. με την ιδιότητα: κάθε αριθμήσιμο $F \subseteq X$ είναι κλειστό, τότε η ρ είναι ισοδύναμη της διακριτής μετρικής ρ_σ $(\rho \sim \rho_\sigma)$.

Θέμα 3ο: i) Αν X μ.χ. και $A, B \subseteq X$ με $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$ να αποδειχθεί τότε ότι για το τυχόν $x \in X$ ισχύει $d(x, A) = d(x, B) = d(x, \overline{A})$. ii) Αν X μ.χ. $x \in X$, $r > 0$, να εξετασθεί τότε ποια σχέση υφίσταται μεταξύ των συνόλων $\overline{s(x,r)}$ (κλειστή θήκη της ανοικτής σφαίρας $s(x,r)$) και $\overline{s}(x,r)$ (κλειστή σφαίρα). Να δοθεί παράδειγμα ώστε η σχέση αυτή να είναι γνήσια.

Θέμα 4ο: Αν $\alpha, b \in R$ με $\alpha < b$, να εξετασθεί τότε αν είναι δυνατή η παράσταση $[\alpha, b] = \bigcup_{n \in N} A_n$ με $\overset{0}{\overline{A_n}} = \emptyset$ $\forall n \in N$.

Θέμα 5ο: A) Αν $\langle x, \rho_1 \rangle, \langle x, \rho_2 \rangle$ μ.χ. αποδείξτε τότε πλήρως ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα: i) ρ_1 ισοδύναμη της ρ_2 $(\rho_1 \sim \rho_2)$ ii) η ταυτοτική απεικόνιση $i : \langle x, \rho_1 \rangle \to \langle x, \rho_2 \rangle$ είναι ομοιομορφισμός. iii) $\forall$ $(x_n)_{n \in N}$, $x_n \in X$, $x_0 \in X$ ισχύει $x_n \xrightarrow{\rho_1} x_0 \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{\rho_2} x_0$. B) Αν $X = r_R([0,1])$, $\rho, \rho_1 : X \times X \to R$ μ.χ. $\rho(f,g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt$ και $\rho_1(f,g) = \max\{|f(t) - g(t)| : t \in [0,1]\}$ να εξετασθεί τότε αν οι ρ και ρ_1 είναι μετρικές και αν ναι, είναι ισοδύναμες;

Θέμα 6ο: i) Αποδείξτε ότι το CQ (άρρητοι) δεν είναι F_σ- σύνολο στο μ.χ. $\langle R, \rho_\sigma \rangle$. ii) Να εξετασθεί αν υπάρχει $F : R \to R$ συνεχής στο Q και ασυνεχής στο CQ.

Θέμα 7ο: A) Έστω $\langle x, \rho \rangle$ συμπαγής μ.χ. και $f : x \to x$ με $\rho(f(x), f(\psi)) < \rho(x, \psi)$ για όλα $x \neq \psi$. Αποδείξτε ότι: i) η συνάρτηση $X \ni x \to \rho(f(x)x) \in R$, $\langle R, \rho_\sigma \rangle$ είναι συνεχής. ii) Υπάρχει $x_0 \in X$ ώστε να ισχύει: $\rho(f(x_0), x_0) = \inf\{\rho(f(x), x) : x \in X\}$. iii) Γι' αυτό το x_0 ισχύει $f(x_0) = x_0$ και είναι μοναδικό με αυτή την ιδιότητα. B) Να δοθεί παράδειγμα ενός κλειστού και φραγμένου συνόλου ενός μ.χ. που δεν είναι συμπαγές.

Θέμα 8ο: i) Δίνονται $\langle X, \rho \rangle$ συμπαγής μ.χ., $f, f_n \in r_R(X)$ με $\{f_n : n \in N\}$ ισοσυνεχής και $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma} f$ (κατά σημείο σύγκλιση). Να αποδειχθεί πλήρως ότι $f_n \xrightarrow{o.\sigma} f$ (ομοιόμορφη σύγκλιση). ii) Ισχύει το συμπέρασμα του (i) αν ο μ.χ. $\langle X, \rho \rangle$ δεν είναι συμπαγής;

Θέμα 9ο: i) Αν $X \subseteq R^n$, $n \in N$ είναι κλειστό και φραγμένο και $A \subseteq r_R(X)$ είναι άλγεβρα που διαχωρίζει τα σημεία του X και περιέχει μία f_1 με $f_1(x) = 1$, $\forall x \in X$, να αποδειχθεί τότε ότι $\overline{A} = r_R(X)$. ii) Να διατυπωθεί το θεώρημα Stone – Weierstrass για πραγματικές συναρτήσεις και εξηγείστε λεπτομερώς γιατί αποτελεί γενίκευση του κλασσικού (προσεγγιστικού) θεωρήματος Weierstrass.

Θέμα 10ο: Να εξετασθεί αν είναι ισοσυνεχής η $\{f_n : n \in N\} \subseteq r_R([0,1])$ μ.χ. $f_n(x) \dfrac{x}{x + (1 - nx)^2}$.