ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΟΥΝΙΟΣ 2000

Θέμα 1ο: Έστω (X,ρ_δ) διακριτός μ.χ. και $A \subset X$. Α) Εξετάστε πότε το A είναι πυκνό αραιό ή πρώτης κατηγορίας στο X και πότε ο μ.χ. (X,ρ_δ) είναι διαχωρίσιμος πλήρης ή συμπαγής (πλήρης αιτιολόγηση). Β) Αν ρ είναι μετρική στον X αποδείξτε ότι $\rho \sim \rho_\delta \Leftrightarrow$ κάθε αριθμήσιμο υποσύνολο του X είναι κλειστό στο X.

Θέμα 2ο: Α) Αν (x_n) είναι ακολουθία σ' ένα μ.χ. X και $x \in X$ ώστε κάθε υπακολουθία (x_{n_i}) της (x_n) έχει υπακολουθία $(x_{\lambda_{n_i}})$ με $x_{\lambda_{n_i}} \to x$ αποδείξτε ότι $x_n \to x$. Β) Έστω X μ.χ. Ψ συμπαγής μ.χ. και $f: X \to \Psi$. Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής $\Leftrightarrow$ το γράφημα $G_f: \{(x,f(x)) : x \in X\}$ της f είναι κλειστό στο $X \times \Psi$.

Θέμα 3ο: Α) Αποδείξτε ότι κάθε συμπαγής μ.χ. είναι ολικά φραγμένος και ότι κάθε ολικά φραγμένος μ.χ. είναι διαχωρίσιμος. Β) Δώστε παραδείγματα που να δείχνουν ότι τα αντίστροφα στο (Α) δεν ισχύουν.

Θέμα 4ο: Α) Έστω X (μη κενός) πλήρης μ.χ. και $A \subset X$ ώστε το A και το $X-A$ είναι πυκνά στο X. Αποδείξτε ότι τουλάχιστον ένα από τα A και $X-A$ δεν είναι F_σ στο X. Β) Χρησιμοποιώντας το (Α) αποδείξτε ότι το σύνολο των αρρήτων αριθμών δεν είναι F_σ στο R. Γ) Είναι η αριθμήσιμη τομή F_σ συνόλων, F_σ σύνολο;

Θέμα 5ο: Θεωρούμε τον μ.χ. $C([0,1])$ με την μετρική $\rho(f,g) = \sup\{|f(x)-g(x)| : x \in [0,1]\}$ και έστω $B = \{f \in C([0,1]) : |f(x)| \le 1$ για κάθε $x \in [0,1]\}$. Α) Δώστε παράδειγμα ακολουθίας (f_n) στο B η οποία συγκλίνει κατά σημείο στη μηδενική συνάρτηση, ώστε κάθε υπακολουθία (f_{n_i}) της (f_n) να μην συγκλίνει ομοιόμορφα στην μηδενική συνάρτηση. Β) Χρησιμοποιώντας το παράδειγμα του (Α) δείξτε ότι το υποσύνολο B του μ.χ. $C([0,1])$ δεν είναι συμπαγές. Γ) Τι συμπέρασμα προκύπτει από το παράδειγμα του (Α) σε σχέση με το θεώρημα του Dini (πλήρης αιτιολόγηση).

Θέμα 6ο: Α) Έστω X συμπαγής μ.χ. $f_n : X \to R$, $n = 1,2,\ldots$ ισοσυνεχής ακολουθία συναρτήσεων και $f: X \to R$ ώστε $f_n \to f$ κατά σημείο. Αποδείξτε πλήρως ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα. Β) Αν $f,g : [0,1] \to R$ είναι συνεχείς συναρτήσεις ώστε $\int_0^1 x^n f(x)dx = \int_0^1 x^n g(x)dx$ για κάθε $n = 0,2,4,\ldots$ Αποδείξτε ότι $f = g$.