

B ΤΑΝΕΤΙΣΤΗΜΟ ΑΘΗΝΩΝ / ΤΗΛΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΕΞΩΖΕΣΜΟΣ ΕΙΟΥ ΥΠΟΥΡΓΟΥ "ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΠΥΞΗ"

ΘΕΜΑ Τ2: (i) "Αν $A \subset \langle X, d \rangle$: $\bar{A} = \emptyset$ τότε δούλυρο $(\bar{A})^c$ είναι πυκνό στο $\langle X, d \rangle$. Κάθε πεντεστρέμενο δύναμης είναι αριστού (πουθενά πυκνό) δύναμης. Υπάρχουν αριθμοί όμως οι οποίοι δημιουργούν πεντεστρέμενη δύναμης." Επίσημη απάντηση:

(ii) Τοια γνωρίζεις $[0,1]$, $(0,1]$, $\{1,2,3,4\}$, \mathbb{Z} , $\mathbb{Q} \cap [0,1]$, $\mathbb{Q} \cap (0, \sqrt{2})$, $\{x \in \mathbb{R}^n : 1 \leq \|x\| \leq 2\}$;

Είναι αριθμός με δύο αριθμούς ανάταξη; (ημίενας δικαίω-
τογικής ανάταξης) (iii) Σετω f_n ακολουθία ενδε-
πεισμάτων $f_n: [0, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$, $n=0, 1, 2, \dots$. Να γίνεται
 $\lim_{n \in \mathbb{N}} f_n$ σε δύο τρόπους.

ΘΕΜΑ 2^ο: (i) Έστω X ευηγάλις μ.χ. και (f_n)_{n \in \mathbb{N}} - $f_n \in C(X)$ ομοιόμορφα (ομοιόμορφα) ευρισκόντας θύματα στην $C(X)$. Αν η $f_n \xrightarrow{n} f$, $n \rightarrow \infty$, τότε όσοι ειναιος $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ειναι ευηγάλιξη. (ii) Αριθμοποιώστε τοι αειενός του F_0 -ευρισκού δείχτες στην έναν $f: (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ ειναι ευρεχής, ή αντιστρέψης F_0 -ευρισκούς στην (Y, d_Y) ειναι F_0 ειναιος στην (X, d_X) .

DEFINITION: (i) $\Sigma_{\text{ctw}}(X, d_X)$ յուշ. Կոմելոյն կա և (X, d_X) սերէ օւենչութէ (E). Եղանակը բարձր է տեսքութէ.

(ii) Εστω $0 < k < +\infty$, $0 < \alpha < 1$ και $L(p_k, \alpha)$ ανθρώπινο Lipschitz ενημέσων $\{f | f \in C([0, 1]) : |f(x) - f(y)| \leq k|x-y|^\alpha \quad x, y \in [0, 1]\}$.

Δειχτεί έτσι ότι (a) η Lip_k & $\delta_{\text{εν}}$ είναι σημαντικά επαγγέλτοι σύνοροι, και
(b) συναρτήσεις αποτελούνται από την $C([0,1])$.

(β) Είναι λεπτομερής οι παραγόντες στην Στατιστική.
 (iii) Η $f_y = \left\{ f_y: f_y(x) = \frac{1}{1+(x-y)^2}, x \in [0,1], y=1,2,\dots \right\}$ είναι σύνολο
 περισχύεται, αφού δύναται να γίνεται συμπλήρωση. (iv) Δείξτε ότι μάθη
 βασική αποτελεσματική είναι υπόχρεωση η οποία είναι συμβατική,
 ενσωματωμένης. (v). Αφού διαλυτώσετε την Θ. Dini εξετάζετε
 και περισσότερη στατιστική. Το f_y με $f_y: [-1,+1] \rightarrow \mathbb{R}, f_y(x) = \frac{2x+y^3}{x+y^3}$,
 $y \in \mathbb{N}$.

ΘΕΜΑ 4^ο: (i) Εξετάστε ποιό, ανδρός παραγόμενων

διπλαγμένος τόπος $\langle R, d_6 \rangle$ είναι ομίχλες (διπλές αναλογίες)

(ii) Δοθέντος ενός μ.χ X , ούτε $A \subset \langle X, d \rangle$ τότε ή $\overline{A} = \cap F_d$, οπου $\{F_d\}_{d \in I}$ είναι μια σικογένεια κλειστών ενδικών πως περιέχουν το A . (iii) "Στις Y μετεκάθησαν όμοιωσις των $\langle X, d_X \rangle$, τότε η ανικόνιση $i : \langle Y, d_Y \rangle \rightarrow \langle X, d_X \rangle$ είναι ευεξής.

(iv) Τοιά είναι ή σχέση μεταφύ των εννοιών "ανυπαρχή μ.χ.", "διαχωρίσιμος μ.χ.", "ναι" ή "ημένος μ.χ.". (Η απόδειξη διατηρείται από την παραπάνω παρατητική θεωρητική των ναι στη γενετή της διαλογιστικής παλαιότερης παραδοσιακής). (v) Αρών διαλογιστική το ΘΒαΐτε δείχζει (χρησιμοποιώντας το Θ.Βαΐτε) ότι η R δεν είναι περιήγησμα επνοεί. (vi), Η ανυπάρχη μετεκάθηση δε ναι η διαχωρίσική μετεκάθηση δε είναι τεοδύναμες; (δικαιολογημένη απόντηση).

ΘΕΜΑ 5^ε: (i) Αν $\exists \langle X, d_X \rangle$ και $\langle Y, d_Y \rangle$ είναι μ.χ. διέταξε δια
 $\delta \langle X \times Y, d \rangle$ είναι μηδεσ μ.χ. $\xleftarrow{\text{αν και γράφονταν σύμβολα}}$
 X, Y είναι μηδεσ μ.χ. (ii) Αν $\alpha \langle X, d_1 \rangle$ και $\langle X, d_2 \rangle$
 $\forall x \in X$ $d_2(x, y) \leq k d_1(x, y)$ $\forall y \in X$
 $\text{είναι μ.χ. και } \exists k > 0 : d_2(x, y) \leq k d_1(x, y)$
 Τότε $\langle X, d_2 \rangle$ αποτελεί ανεικόνια του $\langle X, d_1 \rangle$
 $\text{είναι αποτύχησα αντιχ. (iii) } \Sigma \text{ το } \mathbb{R}^2, \text{ αι ευθείες,}$
 $\text{δυαδική τα σύνορα της μορφής, } A = \{(x, y) : y = ax + b \text{ } b \in \mathbb{R}\}$
 $\text{διέταξε δια είναι μηδεσ σύνορα}$

ΘΕΜΑ 6: (i) Εστω $\langle E, \|\cdot\| \rangle$ χώρος με γέμιση. Αν $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και γραμμικό αναλημματές δείχτε ότι f είναι συνεχής στην E . (ii) Διδεται η συγκεκρινη (x_k) $x_k \in \mathbb{R}^3$, ($\partial \mathbb{R}^3$ θεωρεται μ.χ. ως ουριασμένη γελεκτική), $x_k = \left(\sqrt[n]{x}, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k, \frac{1}{3^n} \right)$, $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$, $x > 0$. Η (x_k) είναι συγκεκρινη και γραμμικη. Αν η \hat{x}_k να βρεθει το. Το, οπις διανοια γραμμικης αναλημματης.

ΘΕΜΑ 7: (i) Εστω $\langle X, d \rangle$ μ.χ. ωτι $A \subseteq X, a \in A$, και
 $\text{ο} \varepsilon \text{ διάμετρος } \text{diam}(A), \text{ diam}(\overline{A})$.
 $\text{ενας αντικόνισης } f: X \rightarrow Y \text{ είναι απεικόνιση},$
 $(ii) \text{ Εστω } \langle X, d_X \rangle \text{ συγκρίσιμη μ.χ. Av } f: X \rightarrow Y \text{ είναι συνεχής, έπειτα } f$
 $\text{δείχτε τι } \text{ανδρουδά. (a)} \text{ Av } f \text{ είναι συνεχής, έπειτα } f$
 $\text{είναι μεταλλική απεικόνιση. (b)} \text{ Av } w \text{ f είναι 1-1, ώτι είναι συ-}$
 $\text{χίσης το } w \text{ f είναι συμπλοκές είγους. (c)} \text{ If } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(w) = 0$
 $\text{είναι συνεχής καθαύτη μεταξύ } w \text{ άνω κάτω. (d)} \text{ Av } w$
 $f: \langle X, d_X \rangle \rightarrow \langle Y, d_Y \rangle \text{ είναι συμπλοκές είγους} \xrightarrow{\quad} \\ w \text{ } f^{-1}: \langle Y, d_Y \rangle \rightarrow \langle X, d_X \rangle \text{ είναι συμπλοκές είγους}$

Mafí yé Ra' Jeando sas na' naeadiivele
na' Ra' Jeando yé Ra' Démalé