ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2001

Θέμα 1ο: i) Έστω X διακριτικός μ.χ. Αν Y μ.χ. δείξτε ότι η $f: X \to \Psi$ είναι συνεχής. ii) Έστω η R με την συνήθη απόσταση. Αν ο X είναι μ.χ.: κάθε $f: X \to R$ να είναι συνεχής δείξτε ότι ο X είναι διακριτός μ.χ. iii) Έστω X συμπαγής μ.χ. και $f: X \xrightarrow{1-1} Y$ συνεχής, επί και αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση. Αποδείξτε ότι: α) η f είναι κλειστή απεικόνιση και β) θα είναι ομοιομορφισμός .

Θέμα 2ο: i) Έστω X μ.χ. Υποθέτουμε ότι εν X κάθε οικογένεια $(F_i)_{i\in I}$ κλειστών συνόλων: $\cap F_i = \emptyset$ έχει μία πεπερασμένη θ_{n_0} οικογένεια της οποίας η τομή είναι $\emptyset$. Δείξτε ότι ο μ.χ. X είναι συμπαγής. ii) Ποια από τα σύνολα $[0,1], (0,1], \{1,2,3,4\}, Z, Q\cap[0,1], Q\cap(0,\sqrt{2})$ είναι συμπαγή εν R με την συνήθη απόσταση; (πλήρως δικαιολογημένη απάντηση). iii) Αν ο X είναι διακριτός μ.χ. δείξτε ότι δεν περιέχει άπειρα υποσύνολα τα οποία να είναι συμπαγή iv) Αν Y_1, Y_2 είναι υποσύνολα του μ.χ. X έτσι ώστε το Y_1 να είναι κλειστό και το Y_2 να είναι συμπαγές δείξτε ότι το $Y_1 \cap Y_2$ είναι συμπαγές. v) Δείξτε ότι κάθε ακολουθία Cauchy(α_n), σ' ένα μετρικό χώρο X, είναι ολικά φραγμένη.

Θέμα 3ο: Έστω σαν X, Y μ.χ. και $f, g: X \to Y$ συνεχείς. Δείξτε ότι i) Το σύνολο $C_f = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ είναι κλειστό εν X και αν $\Psi = R$ τότε και το $\{x \in X : f(x) \le g(x)\}$ είναι κλειστό. ii) Αν το σύνολο A είναι παντού εν X δείξτε ότι αν $\alpha \in A : f(\alpha) = g(\alpha)$ τότε $f = g$. iii) Να δείξετε ότι το διάγραμμα της f, $Gr(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ είναι κλειστό. Ισχύει το αντίστροφο; iv) Το διάγραμμα της f, είναι ομοιόμορφο με τον μ.χ. X.

Θέμα 4ο: i) Αν ο μ.χ. $\langle X, d\rangle$ είναι πλήρης μ.χ. είναι επίσης πλήρης για την απόσταση $e(x,\psi) = \min\{1, d(x,\psi)\}$; ii) Έστω σαν ρ,σ δύο αποστάσεις επί του X: $\rho(x,\psi) \le \kappa\sigma(x,\psi)$, $\sigma(x,\psi) \le l\rho(x,\psi)$ $\kappa, l > 0$. Δείξτε ότι αν ο $\langle X, \rho\rangle$ είναι πλήρης $\Leftrightarrow$ ο $\langle X, \rho\rangle$ είναι πλήρης. iii) Δείξτε ότι οι αποστάσεις d, e είναι ισοδύναμες $d \sim e$.

Θέμα 5ο: i) Έστω N πουθενά πυκνό (αραιό) σύνολο στον μ.χ. X. Δείξτε ότι $\overline{\ell N}$ είναι σύνολο πυκνό στον X. ii) Διατυπώστε το θεώρημα Baire και δείξτε (χρησιμοποιώντας το) ότι α) η R δεν είναι αριθμήσιμο σύνολο β) το Q είναι σύνολο πρώτης κατηγορίας iii) Διατυπώστε το θεώρημα Stone για πραγματικές και μιγαδικές συναρτήσεις και εξηγήστε λεπτομερώς γιατί αποτελεί γενίκευση του κλασικού (προσεγγιστικού) θεωρήματος Weierstrass.