ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2000

Θέμα 1ο: Α) Δείξτε ότι κάθε πλήρης υπόχωρος ενός μ.Χ. είναι κλειστός. Β) Έστω X μ.χ. και Ψ πυκνό υπόχωρος του X. Εξετάστε κατά πόσον ισχύει καθένας από τους παρακάτω ισχυρισμούς: i) Αν ο Ψ είν φραγμένος τότε και ο X είναι φραγμένος. ii) Αν ο Ψ είναι διαχωρίσιμος τότε και ο X είναι διαχωρίσιμο iii) Αν ο Ψ είναι πλήρης τότε και ο X είναι πλήρης.

Θέμα 2ο: Α) Έστω X και Ψ μ.χ. και $f: X \to \Psi$. Αποδείξτε πλήρως ότι η f είναι συνεχής $\Leftrightarrow$ για κάθ $f \subset \Psi$ κλειστό το $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό στο X. Β) Ποιοι από τους υπόχωρους του R: $[0,1),(-1,1)$ και R είναι ομοιομορφικοί; (πλήρης αιτιολόγηση).

Θέμα 3ο: Α) Αποδείξτε ότι κάθε συμπαγής μ.χ. είναι διαχωρίσιμος. Β) Αν ρ_1 και ρ_2 είναι ισοδύναμε μετρικές σ' ένα σύνολο X, ώστε ο (X,ρ_1) να είναι συμπαγής (αντίστοιχα ολικά φραγμένος) μ.χ., είναι τότ και ο (X,ρ_2) συμπαγής (αντίστοιχα ολικά φραγμένος) μ.χ. ;

Θέμα 4ο: Α) Αποδείξτε ότι κάθε βασική ακολουθία σ' ένα μετρικό χώρο έχει το πολύ ένα σημεί συσσώρευσης. Β) Έστω X,Ψ μ.χ. και $f: X \to \Psi$ ομοιόμορφα συνεχής και επί. Αν ο X είναι ολικά φραγμένος τότε και ο Ψ είναι ολικά φραγμένος.

Θέμα 5ο: Α) Διατυπώστε το θεώρημα Cantor που χαρακτηρίζει τους πλήρεις μ.χ. Με τη βοήθεια αυτο αποδείξτε ότι αν ρ είναι μετρική στον R ισοδύναμη με την συνήθη ώστε ο (R,ρ) να είναι πλήρης, τότε υπάρχει $r>0$ ώστε $\delta([x,\infty)) \geq r$ για κάθε $x \in R$ (όπου $\delta([x,\infty))$ η διάμετρος του $[x,\infty)$ ως προς ρ).
Β) Έστω X μ.χ. $B(X)=\{f: X \to R, f$ φραγμένη$\}$ και $\rho(f,g)=\sup|f(x)-g(x)|$ $x \in X$ για κάθε $f,g \in B(X)$. Αποδείξτε πλήρως ότι το $C(X)=\{f \in B(X): f$ συνεχής$\}$ είναι κλειστό στο $B(X)$.

Θέμα 6ο: Α) Έστω X μ.χ. $f_n: X \to R$, $n=1,2,\ldots$ ισοσυνεχής ακολουθία συναρτήσεων και $D \subset X$ πυκνό ώστε για κάθε $x \in D$ η $(f_n(x))_{n\in N}$ συγκλίνει. Αποδείξτε ότι η $(f_n)_{n\in N}$ συγκλίνει κατά σημείο. Β) Έστω $\varphi:[0,1] \to R$ συνεχής και 1-1 και $f:[0,1] \to R$ ώστε $\int_0^1 \varphi^n(x) f(x)dx = 0$ για κάθε $n=0,1,\ldots$ Να δείξετε ότι $f=0$.