ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙΙ – ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1

1. Δώστε παραδείγματα συνεχών συναρτήσεων $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ οι οποίες δεν είναι C^1. Γενικότερα, δώστε παραδείγματα συναρτήσεων κλάσεως C^m που δεν είναι C^{m+1}.

2. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2} & \gamma\iota\alpha\ \ x>0 \\ 0 & \gamma\iota\alpha\ \ x\le 0 \end{cases}$ είναι C^∞ αλλά για κανένα $x>0$ δεν μπορεί να ισχύει $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$. (Υπόδειξη: $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^N}e^{-1/x^2}=0$, για κάθε $N>0$, οσοδήποτε μεγάλο.)

3. Σας δίδονται οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ με $\alpha<\beta<\gamma<\delta$ καθώς και συνεχείς συναρτήσεις $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ και $g:[\gamma,\delta]\to\mathbb{R}$. Ερώτημα: Υπάρχει συνεχής συνάρτηση $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έτσι ώστε $F\big|_{[\alpha,\beta]}=f$ και $F\big|_{[\gamma,\delta]}=g$? Το ίδιο ερώτημα για C^m – συναρτήσεις (αντί των συνεχών). Παρόμοιο ερώτημα: Αν η συνάρτηση $h:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής, υπάρχει συνεχής συνάρτηση $H:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έτσι ώστε $H\big|_{(\alpha,\beta)}=h$?

4. Αποδείξτε ότι για $a,b\in\mathbb{R}^n$, ισχύει η ανισότητα $|\langle a,b\rangle|\le|a||b|$. Δείξτε μάλιστα ότι ισχύει σαν ισότητα αν και μόνο αν τα διανύσματα a,b είναι γραμμικά εξαρτημένα. Δείξτε επίσης ότι $|a+b|\le|a|+|b|$.

5. Δικαιολογίστε γεωμετρικά γιατί η γωνία θ μεταξύ των διανυσμάτων $a,b\in\mathbb{R}^n$ έχει συνημίτονο που δίδεται από τον τύπο $\cos\theta=\frac{\langle a,b\rangle}{|a||b|}$.

6. Αποδείξτε την ταυτότητα του Lagrange: Για $a_j,b_j\in\mathbb{R}^n$,

$$\left(\sum_{j=1}^{n}a_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}b_j^2\right)-\left(\sum_{j=1}^{n}a_jb_j\right)^2=\sum_{1\le j<k\le n}\begin{vmatrix}a_j & a_k\\ b_j & b_k\end{vmatrix}^2.$$

7. Θυμηθείτε ότι το εξωτερικό γινόμενο δυο διανυσμάτων $\vec{a},\vec{b}\in\mathbb{R}^3$ ορίζεται ως εξής:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}.$$

Δείξτε ότι το διάνυσμα $\vec{a}\times\vec{b}$ είναι κάθετο στα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ και ότι το μήκος του είναι ίσο με $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$, όπου θ είναι η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων. Δείξτε επίσης ότι $|\vec{a}\times\vec{b}|=\varepsilon\mu\beta(\varpi(\vec{a},\vec{b}))$ (δηλαδή το εμβαδόν του παραλληλογράμμου $\varpi(\vec{a},\vec{b})$ με κορυφές τα σημεία $\vec{0}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}+\vec{b}$).

8. Έστω $a=(a_1,\dots,a_n)$, $b=(b_1,\dots,b_n)\in\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με κορυφές τα 0, a, b, $a+b$ είναι ίσο με $\sum_{1\le j<k\le n}\begin{vmatrix}a_j & a_k\\ b_j & b_k\end{vmatrix}^2$.

9. Υπολογίστε το όριο κάθε μιας από τις επόμενες ακολουθίες – του $k \to \infty$ – στις περιπτώσεις που αυτό υπάρχει:

$$\left(\frac{\cos k}{k}, \frac{\sqrt[k]{k}}{\sqrt[k]{2-\sin k}}\right), \left(\frac{k\cos k}{2^k}, \frac{k^{10^{100}}\sin k}{2^{k/10^{100}}}\right), \left(\frac{1+\sqrt[2]{2}+\cdots+\sqrt[k]{k}}{k}, \sqrt[k]{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[k]{k}}}\right)$$

$$\left(\frac{1}{k},(-1)^k\right), \left(\left(1-\frac{1}{k}\right)^k, \left(1-\frac{1}{k}\right)^{\sqrt{k}}, \frac{\sqrt{k}\sin(1/k)}{\sin(1/\sqrt{k})}\right), \left(\frac{\sqrt[k]{k!}}{k}, \sqrt[k^2]{k!}, \sqrt[k^3]{k!}, \ldots, \sqrt[k^n]{k!}\right), \left(\frac{1}{k}, \sqrt[k]{k!}\right),$$

$$\left(1-\frac{1}{2}+\cdots+\frac{(-1)^{k-1}}{k}, \sqrt[k]{1-\frac{1}{2}+\cdots+\frac{(-1)^{k-1}}{k}}, \left(1+\frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{2}+\cdots+\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)\right)^k, \sqrt[k]{\log k}\right),$$

$$\left(\sqrt[k]{1^{100}+2^{100}+\cdots+k^{100}}, \frac{k}{k^2+1^2}+\frac{k}{k^2+2^2}+\cdots+\frac{k}{k^2+k^2}, 1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}\right).$$

10. Δείξτε ότι κάθε ακολουθία Cauchy στον $\mathbb{R}^n$ είναι συγκλίνουσα.

11. Δείξτε ότι κάθε φραγμένη ακολουθία στον $\mathbb{R}^n$ έχει συγκλίνουσα υποακολουθία.

12. Δείξτε ότι η μπάλα $B(a,r)=\{x\in\mathbb{R}^n : |x-a|<r\}$ είναι ανοικτό σύνολο. (Εννοείται ότι $a\in\mathbb{R}^n$ και $r>0$).

13. Δείξτε ότι ένα σύνολο $F\subset\mathbb{R}^n$ είναι κλειστό αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $x_k\in F$, η οποία συγκλίνει σε κάποιο $x\in\mathbb{R}^n$, έπεται ότι $x\in F$.

14. Έστω $A\subset\mathbb{R}^n$ και $a\in\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι $a\in\overline{A}$ αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία $x_k\in A$ έτσι ώστε $x_k\to a$.

15. Έστω $A\subset\mathbb{R}^n$ και $a\in\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι αν $a\in A'$ τότε το σύνολο $B(a,\varepsilon)\cap A$ είναι άπειρο.

16. Έστω $A\subset\mathbb{R}^n$ και $a\in\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι $a\in A'$ αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία $x_k\in A-\{a\}$ έτσι ώστε $x_k\to a$.

17. Δείξτε ότι αν A και B είναι ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ τότε και η τομή τους $A\cap B$ είναι ανοικτό σύνολο. Δείξτε επίσης ότι η ένωση μιας οικογένειας ανοικτών συνόλων – υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ – είναι επίσης ανοικτό. Ερώτημα: Αν A_j, $j=1,2,3,\ldots$, είναι μια ακολουθία ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$, έπεται ότι η τομή τους $\bigcap_{j=1}^{\infty}A_j$ είναι ανοικτό σύνολο? Ποιά είναι τα ανάλογα των ανωτέρω για τα κλειστά σύνολα?

18. Θεωρήστε μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$, ορισμένη πάνω σ' ένα σύνολο $A\subset\mathbb{R}^n$, και $a\in A'$. Δείξτε ότι $\lim_{x\to a}f(x)=b$ αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $x_k\in A-\{a\}$ με $x_k\to a$, έπεται ότι $f(x_k)\to b$. (Υποτίθεται ότι $b\in\mathbb{R}$.)

19. Θεωρήστε μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$, ορισμένη πάνω σ' ένα σύνολο $A\subset\mathbb{R}^n$, και $a\in A$. Δείξτε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο a αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $x_k\in A$ με $x_k\to a$, έπεται ότι $f(x_k)\to f(a)$.

20. Θεωρήστε μια συνεχή συνάρτηση $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ και $b\in\mathbb{R}$. Δείξτε ότι τα σύνολα $\{x\in\mathbb{R}^n : f(x)\le b\}$ και $\{x\in\mathbb{R}^n : f(x)=b\}$ είναι κλειστά, ενώ το σύνολο $\{x\in\mathbb{R}^n : f(x)<b\}$ είναι ανοικτό.

21. Έστω $P(x_1,\ldots,x_n)$ και $Q(x_1,\ldots,x_n)$ πολυώνυμα των $x_1,\ldots,x_n$, και $a=(a_1,\ldots,a_n)$ ένα σημείο όπου $Q(a)\neq 0$. Δείξτε ότι

$$\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(a)}{Q(a)}.$$

22. Μελετήστα τα όρια: $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^{xy}}{x^2+y^2-1}$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2}{x^2+y^2}$,

$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\cos(e^{xy}\pi)}{\sin[(x^2+y^2-1)\pi/2]}$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y}{x}$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2}{x^2+y^4}$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x-y}$,

$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq y}}\frac{1-\cos(xy)}{\sin^2(x-y)}$, $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{xy-z^2}{x^2+y^2+z^2}$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^4+y^4}}$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$,

$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^3}{x^2+y^4}$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^{x^2+y^2}-x^2-y^2-1}{(x^2+y^2)^2}$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^{x^2+y^2}-x^2-y^2-1}{1-\cos(x^2+y^2)}$,

$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^{x^4+y^4}-x^4-y^4-1}{\sin^4(x^2+y^2)}$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left[\frac{x^2+y^2}{xy}\sin(x^4+y^4)\right]$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3y}{x-y}$,

$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(1+x^2+y^2)^{1/(x^2+y^2)}$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(1+x^2+y^2)^{1/\sin(x^2+y^2)}$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|x|^{\exp(1/|x|)}y}{x-y}$.

23. Θεωρήστε την συνάρτηση

$$f(x,y)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{y} & \alpha\nu \quad y\neq 0\\ 0 & \alpha\nu \quad y=0.\end{cases}$$

Δείξτε ότι το όριο $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ υπάρχει και είναι 0. Δείξτε ακόμη ότι τα μερικά όρια $\lim_{x\to 0}f(x,y)$ όρια υπάρχουν, για κάθε y, και είναι όλα 0. Αλλά τα μερικά όρια $\lim_{y\to 0}f(x,y)$ δεν υπάρχουν για κανένα $x\neq 0$.

24. Θεωρήστε την συνάρτηση $f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ ορισμένη για $(x,y)\neq(0,0)$.
Δείξτε ότι τα διαδοχικά όρια υπάρχουν και είναι ίσα:

$$\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0}f(x,y))=\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0}f(x,y))=0,$$

αλλά ότι το όριο $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ δεν υπάρχει.

25. Για $x+y\neq 0$, ας ορίσουμε την συνάρτηση $f(x,y)=\frac{x-y}{x+y}$. Δείξτε ότι

$$\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0}f(x,y))=-1 \quad \text{ενώ} \quad \lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0}f(x,y))=1,$$

και ότι όριο $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ δεν υπάρχει.

26. Δείξτε ότι αν $\lim_{(x,y)\to(a,b)}f(x,y)=\ell$ και το μερικό όριο $\lim_{x\to a}f(x,y)$ υπάρχει ($\forall y\neq b$) τότε υπάρχει και το διαδοχικό όριο $\lim_{y\to b}(\lim_{x\to a}f(x,y))$ και μάλιστα

$$\lim_{y\to b}(\lim_{x\to a}f(x,y))=\ell.$$

27. Σωστό ή λάθος? Το όριο

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{f(x,y,z)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\lambda/2}} = 0 \text{ αν και μόνο αν } \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{f(x,y,z)}{|x|^\lambda + |y|^\lambda + |z|^\lambda} = 0.$$

28. Αν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ και

$$\lim_{x\to 0} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{x_j}{|x|} = 0,$$

τί συμπεραίνετε για τα λ_j? Αν απλώς το ανωτέρω όριο υπάρχει, τί συμπέρασμα βγάζετε? Το ίδιο ερώτημα όταν

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x_j>0}} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{x_j}{|x|} = 0.$$

29. Αν $f(x)$ είναι μια γραμμική συνάρτηση ορισμένη για $x \in \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$ και $c \in \mathbb{R}$, και

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-c}{|x-a|} = 0,$$

τί συμπέρασμα βγάζετε?

30. Αν

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2}{x^2+y^2} = 0,$$

τί συμπέρασμα βγάζετε?

Το ίδιο ερώτημα αν

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\alpha x^3 + \beta x^2 y + \gamma x y^2 + \delta y^3}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} = 0.$$

Διατυπώστε και απαντήστε ανάλογα ερωτήματα για τρείς μεταβλητές x, y, z.

31. Μελετήστε τα όρια

$$\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{x^2y^2 + x^2y + xy^2 + 1}{5x^2y^2 - 4x^2y + 3xy^2 - 1}, \lim_{(x,y)\to\infty}\left[x^3y^2 \sin\left(\frac{1}{x^3y^2}\right)\right], \lim_{(x,y)\to\infty}\left[x^3y \sin\left(\frac{1}{x^3y^2}\right)\right],$$

$$\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{x}{y}, \lim_{(x,y)\to\infty}\left[x^2y^3 \sin\left(\frac{1}{x^3y^2}\right)\right], \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2+y^4}, \lim_{(x,y)\to\infty}\left(\frac{x^2}{y}+y\right), \lim_{(x,y)\to\infty} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^4}.$$

32. Αν $x = (x_1, \ldots, x_n) \to \infty$, είναι σωστό ότι $x_1 \to \infty$; $(n \geq 2)$

33. Δείξτε ότι

$$\lim_{x\to\infty}\left(x_1 x_2 \cdots x_n e^{-(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)}\right) = 0.$$

Γενικότερα δείξτε ότι

$$\lim_{x\to\infty} P(x_1, x_2, \ldots, x_n) e^{-(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)} = 0,$$

για κάθε πολυώνυμο $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Και ακόμα γενικότερα, δείξτε ότι

$$\lim_{x\to\infty} P(x_1, x_2, \ldots, x_n) e^{-(|x_1|^{\lambda_1}+|x_2|^{\lambda_2}+\cdots+|x_n|^{\lambda_n})} = 0,$$

για οποιουσδήποτε θετικούς αριθμούς λ_j, όσο μικροί και αν είναι.

34. Δείξτε ότι ένα σύνολο $K \subset \mathbb{R}^n$ είναι κλειστό και φραγμένο αν και μόνο αν κάθε ακολουθία σημείων από το K έχει συγκλίνουσα υποακολουθία – συγκλίνουσα μέσα στο K.

35. Έστω $f : K \to \mathbb{R}^m$ μια συνεχής συνάρτηση ορισμένη πάνω σ' ένα συμπαγές σύνολο $K \subset \mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι το σύνολο $f(K)$ είναι επίσης συμπαγές (υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$).

36. Έστω $f : K \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση ορισμένη πάνω σ' ένα συμπαγές σύνολο $K \subset \mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι υπάρχουν σημεία $a, b \in K$ έτσι ώστε

$$f(a) \le f(x) \le f(b) \text{ για κάθε } x \in K.$$

37. Έστω S_j , $j \in J$, μια οικογένεια υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$, τα οποία είναι κατά τόξα συνεκτικά. Δείξτε ότι αν $\bigcap_{j \in J} S_j \neq \varnothing$ τότε και η ένωσή των $\bigcup_{j \in J} S_j$ είναι επίσης κατά τόξα συνεκτικό.

38. Έστω $f : S \to \mathbb{R}^m$ μια συνεχής συνάρτηση ορισμένη πάνω σ' ένα κατά τόξα συνεκτικό σύνολο $S \subset \mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι το σύνολο $f(S)$ είναι επίσης κατά τόξα συνεκτικό.

39. Αν $S \subset \mathbb{R}$ είναι κατά τόξα συνεκτικό, τί συμπέρασμα βγάζετε?

40. Έστω $f : S \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση ορισμένη πάνω σ' ένα κατά τόξα συνεκτικό σύνολο $S \subset \mathbb{R}^n$. Αν $a, b \in S$ και λ είναι ένας αριθμός μεταξύ των αριθμών $f(a)$ και $f(b)$, δείξτε ότι ο λ είναι τιμή της συνάρτησης f, δηλαδή υπάρχει $\xi \in S$ έτσι ώστε $f(\xi) = \lambda$.

41. Δείξτε ότι μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$, ορισμένη πάνω σ' ένα σύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$, είναι ομοιόμορφα συνεχής αν και μόνο αν για κάθε δυο ακολουθίες $a_k, b_k \in A$, για τις οποίες $|a_k - b_k| \to 0$, έπεται ότι $|f(a_k) - f(b_k)| \to 0$.

42. Έστω $f : K \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση ορισμένη πάνω σ' ένα συμπαγές σύνολο $K \subset \mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

43. Ερώτημα: Είναι το γινόμενο ομοιόμορφα συνεχών συναρτήσεων, ομοιόμορφα συνεχής? Ομοίως για το πηλίκο.

44. Εξετάστε αν οι συναρτήσεις

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy\sqrt[3]{y}}{x^2 + y^2} & \text{για } (x,y) \neq (0,0) \\ \lambda & \text{για } (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \text{και} \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{για } (x,y) \neq (0,0) \\ \lambda & \text{για } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

είναι συνεχείς. (Το λ είναι δοσμένος αριθμός.)

45. Εξετάστε αν οι συναρτήσεις

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x-y)}{x-y} & \text{για } x \neq y \\ \lambda & \text{για } x = y \end{cases} \quad \text{και} \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x-y)}{xy} & \text{για } xy \neq 0 \\ \lambda & \text{για } xy = 0 \end{cases}$$

είναι συνεχείς. (Το λ είναι δοσμένος αριθμός.)

46. Έστω D μια μπάλα $B(a,r)$ στον $\mathbb{R}^n$. Κατασκευάστε μια συνεχή συνάρτηση $f : D \to \mathbb{R}$ η οποία να μην επεκτείνεται σε συνεχή συνάρτηση σε κανένα σημείο του συνόρου του D.