Εξεταση στο μαθημα ΑΠΕΙΡ. ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙΙ (31/1/06)

ΘΕΜΑΤΑ (απο τα Α θα γράψετε 2, απο τα Β 2 και απότα Γ 1)

Α. 1. α) Υπολογίστε την κατευθυνόμενη παράγωγο της $f(x,y)=x^2+y^3$ στο σημείο $(-1,3)$, στην κατεύθυνση στην οποία η f μεταβάλλεται ταχύτερα.

β) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\iint_D x\,dx\,dy$ οπου $D=\{(x,y): x^2+y^2\geq 1, \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\leq 1, x\geq 0, y\geq 0\}$.

2 α) Εξετάστε αν το σύστημα $\begin{aligned} xv+yu+z+u^2&=0 \\ xyz+u+v+1&=0 \end{aligned}$ περιέχει υπό πεπλεγμένη μορφή συναρτήσεις $u=f(x,y,z)$, $v=g(x,y,z)$ σε περιοχή του $(2,1,0,-1,0)$ και υπολογίστε τις μερικές παραγώγους των f και g στο σημείο $(2,1,0)$.

β) Υπολογίστε τον όγκο του στερεού Σ που περικλείεται απο τον κύλινδρο $x^2+y^2=2x$ και το παραβολοειδές $z=x^2+y^2$, $z>0$

3 α) Εστω $f(x,y)$, $(x,y)\in(\alpha,\beta)\times(\gamma,\delta)$ συνάρτηση για την οποια υπάρχουν οι $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$ και ειναι φραγμένες σε μια περιοχή ενος σημείου (x_0,y_0). Αποδείξτε οτι η f ειναι συνεχής στο (x_0,y_0).

β) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_0^1\left(\int_y^1 x^3 y\, e^{xy^2}dx\right)dy$.

Β 1. α) Εστω $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, C^1-τάξεως συνάρτηση. Αποδείξτε οτι για καθε C^1-τάξεως καμπύλη $\Gamma: \vec{r}=\vec{r}(t), t\in[\alpha,\beta]$ ισχυει ο τυπος $\int_\Gamma \nabla f\cdot d\vec{r}= f(\vec{r}(\beta))-f(\vec{r}(\alpha))$.

β) Μελετείστε ως προς τα ακρότατα την συναρτηση $f(x,y)=1+x^2-y^2$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

2 α) Μελετείστε ως προς την διαφορισιμότητα την συνάρτηση $f(x,y)=\begin{cases} x^{4/3}\sin\frac{y}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0\end{cases}$

β) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_{\partial G}(xy-x^2)\,dx+x^2y\,dy$ όπου G είναι το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$.

3 α) Αν η $f(u,v)$ ειναι C^1-ταξεως και θέσουμε $w(x,y,z)=x^3 f\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)$ αποδείξτε οτι $x\frac{\partial w}{\partial x}+y\frac{\partial w}{\partial y}+z\frac{\partial w}{\partial z}=3w$

β) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_{(0,0,0)}^{(1,2,0)} 2xy\,e^z dx+x^2e^z dy+(x^2ye^z+z^2)dz$.

Γ 1. Εστω $f(x,y)$, $(x,y)\in D$, οπου D ο κλειστος μοναδιαίος δίσκος κεντρου $(0,0)$, συνεχής και με $|f(x,y)|<1$. Αν η f ειναι διαφορίσιμη στο εσωτερικό του D αποδείξτε οτι υπάρχει (x_0,y_0) στο εσωτερικό του D ωστε $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=4x_0$ και $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=4y_0$. (Υποδ. Θεωρείστε την συνάρτηση $g(x,y)=f(x,y)+2(x^2+y^2)$)

2 Αποδείξτε οτι ισχυει $\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-a^2}\right)\leq\iint_{[0,a]\times[0,a]} e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy\leq\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-2a^2}\right)$.