

Θ1) Ελέγξτε ως προς την συνέχεια και την διαφορισιμότητα στο σημείο $(0,0)$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \dots$$

Θ2) Αποδείξτε ότι υπάρχουν οι μερικές παραγώγοι $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ αλλά δεν υπάρχει το $df(0,0)$ για την συνάρτηση $f(x,y) = \begin{cases} x+y & , x=0 \text{ ή } y=0 \\ 1 & , \text{διαφορετικά} \end{cases} \dots$

Θ3) Μελετήστε ως προς την ύπαρξη ακροτάτων την συνάρτηση $f(x,y,z) = e^x(x^2 - y^2 - 2z^2)$

Θ4) i) Βρείτε την μέγιστη τιμή για την κατευθυνόμενη παραγώγο στο σημείο $(1,2,-1)$ για την συνάρτηση:

$$f(x,y,z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$$

ii) Βρείτε το εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 6$ στο σημείο $(4,1,9)$. -

Θ5) Αν $f(x,y)$ είναι C^1 -τάξης συνάρτηση και θέσουμε $x = e^s \cosh t$, $y = e^s \sinh t$ τότε για την $h(s,t) = f(e^s \cosh t, e^s \sinh t)$ ισχύει η σχέση

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = e^{-2s} \left[\left(\frac{\partial h}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)^2 \right] \quad \dots$$

Θ6) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\iint_D (x+y)^3 (x-y)^2 dx dy$ όπου D είναι το επίπεδο χωρίο με κορυφές τα σημεία $A(1,0), B(2,1), \Gamma(1,2), \Delta(0,1)$. -

Θ7) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\iint_D e^{-(x^2+y^2)} dx dy$ όπου

$$D = \{(x,y) : -1 \leq y \leq 1, -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}\} \quad \dots$$

Θ8) Επαληθεύστε το θεώρημα Green για τις συναρτήσεις $P(x,y) = x^3 + y^3$; $Q(x,y) = 2y^3 - x^3$ στο χωρίο $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. -

Θ9) Εξετάστε αν είναι συντηρητικό το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}(x,y,z) = (y; x+z \sin yz, y \sin yz)$ και στην συνέχεια υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_{(0,0,0)}^{(0,1/2,\pi)} y dx + (x+z \sin yz) dy + y \sin yz dz$. -

Θ10) Υπολογίστε τον όγκο $V(B)$ του στερεού B που περιβάλλεται από το γραφικό της επιφάνειας $3x^2 + 9y^2 + z^2 = 9$. -

ΣΗΜΕΙΩΣΗ : Απαντείστε σε 8 (οκτώ) από τα 10 (δέκα) ισοδύναμα θέματα.

Το γράφο των θεμάτων παραδίνεται μαζί με το γραπτό σας.