ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙΙ

Θέματα εξετάσεων **14/9/2005**

1. Μελετήστε τα όρια $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\cos(xy)}{x^2+y^2-1}$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sin(x^2+y^2)}$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x-y}$.

2. Επιλέξτε έναν χαρακτηρισμό της συμπάγειας και έναν χαρακτηρισμό της ομοιόμορφης συνέχειας και αποδείξτε ότι μια συνεχής συνάρτηση $f: K \to \mathbb{R}$, πάνω στο συμπαγές σύνολο $K \subset \mathbb{R}^n$, είναι ομοιόμορφα συνεχής.

3. Υπολογίστε το διαφορικό και τον πίνακα Jacobi για την διανυσματική συνάρτηση $\vec{F}(x,y,z) = (x+y+z, x^2+y^2+z^2, xyz)$ στο σημείο $(1,0,2)$ και ακολούθως το $d\vec{F}(1,0,2)(2,3,0)$.

4. Αναζητήστε λύσεις της εξίσωσης του Laplace $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$ της μορφής $f(x,y,z) = g(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$, όπου $g(t)$ είναι μια συνάρτηση τάξης C^2.

5. Θεωρήστε την απεικόνιση $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με $f(x,y) = (x^2-y^2, 2xy)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Δείξτε ότι για κάθε $(a,b) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, η f αντιστρέφεται τοπικά στο σημείο (a,b). Επίσης δείξτε ότι η f δεν αντιστρέφεται ολικά.

6. Α. Θεωρήστε την συνάρτηση $f(x,y) = \begin{cases} x\sin(1/y) & \alpha\nu \;\; y \neq 0 \\ 0 & \alpha\nu \;\; y = 0 \end{cases}$ και δείξτε ότι $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Εν συνεχεία εξετάστε αν υπάρχουν τα όρια $\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} f(x,y)\right]$ και $\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} f(x,y)\right]$.

Β. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x,y) = \begin{cases} (x^2y - y^3)/(x^2+y^2) & \alpha\nu \;\; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \alpha\nu \;\; (x,y) = (0,0) \end{cases}$ είναι συνεχής και έχει πρώτης τάξεως μερικές παραγώγους στο $\mathbb{R}^2$. Επίσης εξετάστε αν η f είναι διαφορίσιμη.

7. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\iint_D (1-x^2-4y^2)^{3/2}\, dxdy$ όπου $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+4y^2 \leq 1\}$.

8. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα: $\iint_{[0,1]\times[0,1]} \dfrac{xy}{(x^2+y^2+1)^2}\, dxdy$, $\iint_{\{x^2+y^2\leq 1,\; y\geq 0\}} \dfrac{x^3}{x^4+y^4+1}\, dxdy$.

9. Α. Να βρεθούν $a,b,c \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{(x,y)\to(2,1)} \dfrac{\left|x^y - a - bx - cy\right|}{\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}} = 0$.

Β. Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_{\partial D} [(2x^4+y^2+e^x)dx + (3x - y^3 - e^{y^2})]dy$ όπου $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x+1)^2 + y^2 < 2\}$.

10. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} (x^2+y^2+z^2)^{3/2} dz\right) dy\right] dx$.

11. Βρείτε το κέντρο βάρους του στερεού ημισφαιρίου $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1,\; z \geq 0\}$ (υποθέτοντάς το ομογενές). [Υπενθυμίζουμε τον τύπο για τις συντεταγμένες $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ του κέντρου βάρους:

$$(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = \left(\frac{\iiint_D x\,dxdydz}{\iiint_D dxdydz}, \frac{\iiint_D y\,dxdydz}{\iiint_D dxdydz}, \frac{\iiint_D z\,dxdydz}{\iiint_D dxdydz}\right).]$$

ΑΠΑΝΤΗΣΤΕ ΣΕ 8 ΘΕΜΑΤΑ.

ΟΛΕΣ ΟΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΝΑ ΕΙΝΑΙ <u>ΠΛΗΡΩΣ</u> ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΜΕΝΕΣ.

Στην πρώτη σελίδα του γραπτού σας, γράψτε σε ποια θέματα απαντήσατε.