Εξετάσεις στο μάθημα **ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙΙ (25.9.2000)**

1° Έστω $\bar{f}: U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ διαφορίσιμη στο $\bar{a} \in U$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $M > 0$, $\delta > 0$ ώστε να ισχύει:

$$\|\bar{f}(\bar{x}) - \bar{f}(\bar{a})\| \le M\|\bar{x} - \bar{a}\| \quad \forall\, \bar{x} \in U \text{ με } \|\bar{x} - \bar{a}\| < \delta .$$

2° Υλικό σημείο τη χρονική στιγμή $t = 0$ βρίσκεται στο σημείο (1,2,-3) και αρχίζει να κινείται με ταχύτητα $\vec{v}(t) = (e^t, e^t + 2, e^{2t})$. Να ευρεθεί η θέση $\vec{r}(t)$ του σημείου καθώς και η επιτάχυνση $\vec{a}(t)$ τη χρονική στιγμή t.

3° Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο (2,-1,1) της καμπύλης C του $\mathbb{R}^3$, η οποία είναι η τομή των επιφανειών με εξισώσεις: $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 14$ και $x^2 + y^2 + z^2 - 6 = 0$.

4° **i)** Να υπολογισθεί η $D_{\vec a} f(-1,2,3)$ ως προς την κατεύθυνση $\vec{a} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ της $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με $f(x,y,z) = xz - y^2$.

ii) Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα τοπικά ακρότατα της $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 2x + 2y - 4$.

5° Αποδείξτε ότι μία συνάρτηση $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, η οποία είναι ομογενής βαθμού 2 και συνεχής, είναι θετικά ορισμένη $\Leftarrow$ όταν υπάρχει $m > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x,y)| \ge m\|(x,y)\|^2 \;\; \forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

6° Αν $R \subseteq \mathbb{R}^2$ κλειστό ορθογώνιο και $f: \bar{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής, να αποδειχθεί τότε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη.

7° Να υπολογισθεί το $\iint_D x\,dx\,dy$, όπου

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \ge 1, \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\right\}.$$

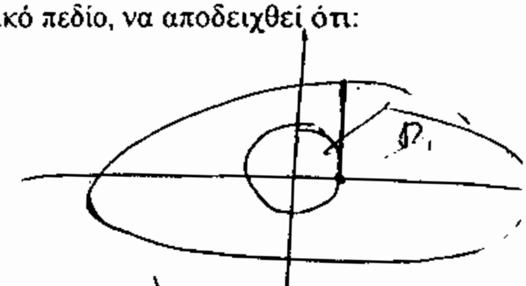
8° Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού που περικλείεται από τη σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ και τον κύλινδρο $x^2 + y^2 = 2ax$, $a > 0$.

9° Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{(1,0,1)}^{(\alpha,\beta,\gamma)} ze^x dx + z dy + (y + e^x) dz .$$

10° Αν $A \subseteq \mathbb{R}^3$ ανοικτό και $\bar{F} = (P,Q,R): A \to \mathbb{R}^3$ C^1 – διανυσματικό πεδίο, να αποδειχθεί ότι:

- **i)** Αν το $\bar{F}$ είναι συντηρητικό, τότε το $\bar{F}$ είναι αστρόβιλο, και
- **ii)** Να εξετασθεί αν ισχύει το αντίστροφο του i).



Από τα δέκα (10) θέματα να γραφούν τα οκτώ (8).