47. Εξετάστε αν η συνάρτηση $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, έχει μερικές παραγώγους $\partial f/\partial x$ και $\partial f/\partial y$. Είναι η συνάρτηση f συνεχής?

48. Μια συνάρτηση μπορεί να έχει μερικές παραγώγους και εν τούτοις να μην είναι συνεχής. Δείξτε το με παράδειγμα την συνάρτηση

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{για } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{για } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

49. Υπολογίστε το διαφορικό της συνάρτησης $f(x,y)=x^3+x^2y+e^xy^2$ στα σημεία $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,-1)$, $(2,3)$, $(-1,0)$.

50. Θεωρήστε την συνάρτηση $f(x,y)=xe^{y^2}+y\cos x$. Υπολογίζοντας το διαφορικό της f στο σημείο (0,0), δείξτε ότι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\left|xe^{y^2}+y\cos x-x-y\right|}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$$

Για ποιούς αριθμούς A,B,C, είναι σωστό ότι

$$\lim_{(x,y)\to(\pi,1)}\frac{\left|xe^{y^2}+y\cos x-Ax-By-C\right|}{\sqrt{(x-\pi)^2+(y-1)^2}}=0\,?$$

51. Αν $f(x,y)$ είναι μια διαφορίσιμη συνάρτηση στο σημείο (α,β), $A,B,C\in\mathbb{R}$, και

$$\lim_{(x,y)\to(\alpha,\beta)}\frac{\left|f(x,y)-Ax-By-C\right|}{\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}}=0,$$

τί συμπέρασμα βγάζετε.

52. Θεωρήστε την συνάρτηση

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\frac{1}{\left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\right)^{\frac{n}{2}-1}}\quad(n\geq 3).$$

Δείξτε ότι

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\frac{(2-n)x_j}{\left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\right)^{n/2}}.$$

Συζητήστε την φυσική σημασία αυτού του υπολογισμού για $n=3$.

53. Βρήτε μια συνάρτηση $f(x,y)$, ορισμένη για $(x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$, ούτως ώστε

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}\quad\text{και}\quad\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2}.$$

54. Θεωρήστε την συνάρτηση

$$f(x,y,z)=e^x\cos y-2\sin y\cos z+3z$$

ορισμένη για $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, και υπολογίστε το διαφορικό της στο σημείο $a=(0,0,0)$. Εν συνεχεία δείξτε ότι

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{\left|f(x,y,z)-1-x+2y-3z\right|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=0.$$

55. Αν $f(x,y)$ είναι μια συνάρτηση των x,y και θεωρήσουμε δυο συναρτήσεις $x=x(t)$ και $y=y(t)$ της μεταβλητής t, τότε η παράγωγος ως προς t της σύνθετης συνάρτησης $f=f(x(t),y(t))$ δίδεται από τον τύπο:

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} \quad \text{(κανόνας της αλυσίδας).}$$

Εννοείται βέβαια ότι οι εμπλεκόμενες συναρτήσεις είναι διαφορίσιμες. Επίσης – αναλυτικότερα – ο τύπος αυτός γράφεται ως εξής:

$$\frac{d}{dt}[f(x(t),y(t))]=\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t))\frac{dx(t)}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t))\frac{dy(t)}{dt}.$$

Επαληθεύσατε τον ανωτέρω τύπο στις περιπτώσεις:

(1) $f(x,y)=x^3e^{xy^2}$, $x=t^2$, $y=\sin t$

(2) $f(x,y)=x^y$, $x=t^2$, $y=t^3$.

(3) $f(x,y)=(\log x)^y$, $x=e^t$, $y=t$.

56. Θεωρήστε μια C^1-καμπύλη $\vec{r}=\vec{x}(t)=(x_1(t),x_2(t),\dots,x_n(t))$, $\alpha<t<\beta$, στον χώρο $\mathbb{R}^n$, και εξηγήστε – γεωμετρικά – γιατί το διάνυσμα $\frac{d\vec{r}}{dt}(\tau)$ δίνει την κατεύθυνση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο $x(\tau)$. (Υποτίθεται ότι $\frac{d\vec{r}}{dt}(\tau)\neq\bar{0}$.) (Υπενθύμιση: $\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d\vec{x}(t)}{dt}=\left(\frac{dx_1(t)}{dt},\frac{dx_2(t)}{dt},\dots,\frac{dx_n(t)}{dt}\right)$)

57. Θεωρήστε την καμπύλη στον xyz – χώρο με παραμετρικές εξισώσεις

$$x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=e^t,\ -\infty<t<+\infty,$$

και γράψτε εξισώσεις για την εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο $(0,1,e^{\pi/2})$. Επίσης γράψτε την εξίσωση του επιπέδου που είναι κάθετο στην καμπύλη στο σημείο αυτό.

58. Στην άσκηση **56** υποθέσαμε ότι $\frac{d\vec{r}}{dt}(\tau)\neq\vec{0}$. Για να δείτε τί μπορεί να συμβεί στην περίπτωση που $\frac{d\vec{r}}{dt}(\tau)=\vec{0}$, μελετήστε τις εξής καμπύλες στο xy – επίπεδο:

$$(x(t),y(t))=\begin{cases}\left(t^3\cos(1/t),t^3\sin(1/t)\right) & \alpha\nu\quad t\neq 0\\ (0,0) & \alpha\nu\quad t=0.\end{cases}$$

$$(x(t),y(t))=\begin{cases}\left(e^{-1/t^2}\cos(1/t),e^{-1/t^2}\sin(1/t)\right) & \alpha\nu\quad t\neq 0\\ (0,0) & \alpha\nu\quad t=0.\end{cases}$$

$$(x(t),y(t))=\begin{cases}\left(e^{-1/t^2}\cos(1/t),e^{-1/t^2}\sin(1/t)\right) & \alpha\nu\quad t>0\\ 0 & \alpha\nu\quad t=0\\ e^t\left(e^{-1/t^2}\cos(1/t),e^{-1/t^2}\sin(1/t)\right) & \alpha\nu\quad t<0.\end{cases}$$

59. Θεωρήστε μια C^1 – συνάρτηση $f(x,y,z)$, την επιφάνεια $\mathcal{S}$ με εξίσωση $f(x,y,z)=0$, δηλαδή $\mathcal{S}=\{(x,y,z):\ f(x,y,z)=0\}$, καθώς και ένα σημείο (a,b,c) πάνω στην επιφάνεια αυτή. Εξηγήστε – γεωμετρικά – γιατί το διάνυσμα $\vec{\nabla}f(a,b,c)$ είναι κάθετο στην επιφάνεια $\mathcal{S}$ στο σημείο (a,b,c). Υποτίθεται ότι $\vec{\nabla}f(a,b,c)\neq\vec{0}$.

60. Γράψτε την εξίσωση του επιπέδου του εφαπτομένου της επιφάνειας με εξίσωση $z = 2x^2 + y^2$, στο σημείο $(-1,2,6)$.

61. Γράψτε την εξίσωση του επιπέδου του εφαπτομένου της επιφάνειας με εξίσωση $z^2 = 2x^2 + y^2$, στο σημείο $(-1,2,\sqrt{6})$.

62. Γράψτε την εξίσωση του επιπέδου του εφαπτομένου της επιφάνειας με εξίσωση $2x^2 + y^2 + 5z^2 = 16$, στο σημείο $(1,-3,1)$.

63. Θεωρήστε την καμπύλη C στον $xyz-$χώρο η οποία είναι η τομή των επιφανειών με εξισώσεις $z = y^2 - 3x^2$ και $z^2 + y^2 = 2$, και γράψτε εξισώσεις για την ευθεία που είναι εφαπτόμενη στην C στο σημείο $(0,1,1)$.

64. Μια συνάρτηση μπορεί σε κάποιο σημείο να έχει μερικές παραγώγους (πρώτης τάξης) αλλά να μην έχει κατευθυνόμενη παράγωγο σε καμιά άλλη κατεύθυνση (δηλαδή εκτός από τις κατευθύνσεις των αξόνων). Δείξτε το με παράδειγμα την συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{για } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{για } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

65. Μια συνάρτηση μπορεί να έχει κατευθυνόμενες παραγώγους σε κάθε κατεύθυνση – σε κάποιο σημείο – και εν τούτοις να μην είναι συνεχής στο σημείο αυτό. Δείξτε το με παράδειγμα την συνάρτηση $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{για } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{για } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

66. Σε ποιά κατεύθυνση, η συνάρτηση $f(x,y) = xe^y + x^2y + y^2$ έχει την πιο απότομη μεταβολή?

67. Για την συνάρτηση $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{αν } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{αν } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ δείξτε ότι:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y(x^4 - y^4 + 4x^2y^2)}{(x^2 + y^2)^2} & \text{αν } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{αν } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x(x^4 - y^4 - 4x^2y^2)}{(x^2 + y^2)^2} & \text{αν } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{αν } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0) = -1 \text{ και } \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0) = 1.$$

68. Δείξτε ότι αν $f{:}D \to \mathbb{R}$ είναι μια C^1-συνάρτηση ορισμένη σ' ένα ανοικτό σύνολο $D \subset \mathbb{R}^n$, και δυο σημεία $a,b \in D$ ούτως ώστε το ευθύγραμμο τμήμα $[a,b] \subset D$, Τότε $f(b) - f(a) = \nabla f(\xi)\cdot(b-a) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\xi)(b_j - a_j)$, για κάποιο σημείο $\xi \in [a,b]$. Υπόδειξη: Θεωρήστε την συνάρτηση $f((1-t)a + tb)$, $t \in [0,1]$.

69. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x,y)=\log(x^2+y^2)$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$, ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση του Laplace:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0.$$

70. Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\frac{1}{(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^{\frac{n}{2}-1}},\quad (x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n-\{0\},$$

ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση του Laplace:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}=0.$$

71. Δείξτε ότι μια διαφορίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}^n-\{0\}\to\mathbb{R}$ είναι ομογενής βαθμού λ (όπου $\lambda\in\mathbb{R}$), δηλαδή $f(tx)=t^\lambda f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^n-\{0\}$ και κάθε $t>0$, αν και μόνο αν η f ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση:

$$\sum_{j=1}^{n}x_j\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)=\lambda f(x).$$

Εφαρμογή: Για $a_m\in\mathbb{R}$, η συνάρτηση

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\sum_{m=1}^{N}\frac{a_m}{(x_1^{2m}+x_2^{2m}+\cdots+x_n^{2m})^{1/2m}}$$

ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση:

$$\sum_{j=1}^{n}x_j\frac{\partial f}{\partial x_j}=-f.$$

72. Θεωρήστε μια C^1 – συνάρτηση $f:D\to\mathbb{R}$ ορισμένη σ' ένα ανοικτό και κυρτό σύνολο $D\subset\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι

$$|f(x)-f(y)|\le\left(\sup_{z\in D}|\nabla f(z)|\right)|x-y|,\ \text{για κάθε } x,y\in D.$$

73. Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(t,x_1,x_2,\dots,x_n)=\frac{1}{t^{n/2}}e^{-(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)/t},\quad (x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ t>0,$$

ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση της θερμότητας:

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}.$$

74. Δείξτε ότι αν $f\in C^2(\mathbb{R})$ και $g\in C^1(\mathbb{R})$ τότε η συνάρτηση

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x+t)+f(x-t)]+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}g(s)ds,\ x\in\mathbb{R},\ t\ge 0,$$

ικανοποιεί τα εξής:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u(x,0)=f(x)\ \text{ και }\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=g(x).$$

(Η ανωτέρω εξίσωση είναι απλούστερη μορφή της κυματικής εξίσωσης.)

75. Έστω $D \subset \mathbb{R}^2$ ένα ανοικτό και συνεκτικό σύνολο και $f : D \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση έτσι ώστε

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \text{ και } \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \text{ στα σημεία του } D.$$

Δείξτε ότι $f \equiv$ σταθερά. Τί συμβαίνει όταν το D δεν είναι συνεκτικό? Γενικεύστε στο $\mathbb{R}^n$.

76. Θεωρήστε το σύνολο $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}$ και μια C^∞ συνάρτηση $f : D \to \mathbb{R}$ ώστε $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ σε κάθε σημείο του D. Έπεται ότι

$$f(-x,0) = f(x,0) \text{ για } x > 1?$$

77. Εξηγήστε γιατί το σύνολο $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ (με τις συνήθεις πράξεις) είναι γραμμικός χώρος πάνω στο σώμα $\mathbb{R}$. Εν συνεχεία θεωρήστε τον τελεστή

$$T : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n),$$

που ορίζεται από την σχέση: $T(f) = \frac{\partial f}{\partial x_1}$ για $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Δείξτε ότι ο T είναι γραμμικός και ότι κάθε πραγματικός αριθμός είναι ιδιοτιμή του. Υπόδειξη: $e^{\lambda x_1}$.
Δείξτε επίσης ότι το ίδιο ισχύει και για τον τελεστή

$$S(f) = \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}.$$

78. Έστω $U \subset \mathbb{R}$, ανοικτό με $[0,1] \subset U$, και $h \in C^m(U)$. Δείξτε ότι

$$h(1) = h(0) + \frac{h'(0)}{1!} + \frac{h''(0)}{2!} + \cdots + \frac{h^{(m-1)}(0)}{(m-1)!} + \frac{1}{(m-1)!}\int_0^1 h^{(m)}(t)(1-t)^{m-1}\,dt.$$

Υπόδειξη: Ολοκληρώστε κατά μέρη στην $h(1) = h(0) - \int_0^1 h'(t)d(1-t)$. Εν συνεχεία κάντε το ίδιο με την $h(1) = h(0) + h'(0) - \int_0^1 h''(t)d\left(\frac{1}{2}(1-t)^2\right)$, κ.ο.κ.

79. Έστω $U \subset \mathbb{R}$, ανοικτό με $[0,1] \subset U$, και $h \in C^m(U)$. Δείξτε ότι

$$h(1) = h(0) + \frac{h'(0)}{1!} + \frac{h''(0)}{2!} + \cdots + \frac{h^{(m-1)}(0)}{(m-1)!} + \frac{h^{(m)}(\tau)}{m!},$$

για κάποιο $\tau \in [0,1]$. Υπόδειξη: Στηριχθήτε στην άσκηση **78** και ολοκληρώστε την

$$\lambda(1-t)^{m-1} \le h^{(m)}(t)(1-t)^{m-1} \le \mu(1-t)^{m-1} \text{, όπου}$$

$$\lambda = \min\{h^{(m)}(t):\ 0 \le t \le 1\} \text{ και } \mu = \max\{h^{(m)}(t):\ 0 \le t \le 1\}.$$

80. Έστω $g \in C^m(U)$ όπου $U \subset \mathbb{R}$, ανοικτό και $[a, x] \subset U$. Δείξτε ότι, του $x \to a$,

$$g(x) = g(a) + \frac{g'(a)}{1!}(x-a) + \frac{g''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{g^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m + o(|x-a|^m),$$

δηλαδή

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{|x-a|^m}\left[g(x) - g(a) - \frac{g'(a)}{1!}(x-a) - \frac{g''(a)}{2!}(x-a)^2 - \cdots - \frac{g^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m\right] = 0.$$