

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ I, Ιανουάριος 2000

Θέμα 1ο: (α) Ας θεωρήσουμε μία ακολουθία τριών ρίψεων ενός κύβου και έστω A το ενδεχόμενο όπως το άθροισμα των ενδείξεων είναι μεγαλύτερο του 10. Δείξετε ότι $N(A) = N(A')$ και συμπεράνετε την πιθανότητα $P(A)$. (β) Έστω ότι A και B ενδεχόμενα με $P(A) = \frac{3}{4}$, $P(B) = \frac{2}{3}$ και $P(A \cup B) = \frac{11}{12}$. Να εξετασθεί κατά πόσον τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα και υπολογισθεί η πιθανότητα $P(A - B)$.

Θέμα 2ο: (α) Ένας παίκτης ρίχνει ν φορές ένα σύνηθες νόμισμα. Έστω A το ενδεχόμενο εμφάνισης και των δύο όψεων του νομίσματος και B το ενδεχόμενο εμφάνισης μιας το πολύ φοράς της όψης γράμματα. Να εξετασθεί για $n=3$ και $n=5$ κατά πόσον τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα. (β) Ένας δεύτερος παίκτης ρίχνει επίσης n φορές το ίδιο νόμισμα. Να υπολογισθεί η πιθανότητα να φέρει τον ίδιο αριθμό φορών την όψη γράμματα με τον πρώτο.

Θέμα 3ο: Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X έχει την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[\alpha, \beta]$. (α) Να υπολογισθούν η μέση τιμή $E(X)$ και η διασπορά $V(X)$. (β)

Στη μερική περίπτωση που $E(X) = \frac{1}{2}$ και $V(X) = \frac{3}{4}$ να βρεθούν οι συναρτήσεις πυκνότητας $f_Y(y)$ και κατανομής $F_Y(v)$ της τυχαίας μεταβλητής $Y = |X|$.

Θέμα 4ο: Έστω ότι η απόκλιση X της βολής ενός σκοπευτή από το κέντρο στόχου είναι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = 2(1-x), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Ο σκοπευτής κερδίζει το στοίχημα αν η απόκλιση της βολής του από το κέντρο του στόχου δεν είναι μεγαλύτερη του $1/5$. Να υπολογισθούν (α) η πιθανότητα να απαιτηθούν 4 τουλάχιστο βολές μέχρι να κερδίσει ο σκοπευτής το στοίχημα και (β) η μέση τιμή και η διασπορά του αριθμού Y των βολών που απαιτούνται μέχρι να κερδίσει ο σκοπευτής το στοίχημα.

Απαντήστε σε 3 από 4 θέματα σε $2 \frac{1}{2}$ ώρες.