

# Εξετάσεις Απειροστικού Λογισμού II

6 Ιουνίου 2005 - Απαντήσεις

1. (α) Απροσδιόριστη μορφή: εξετάζουμε το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2}$ . Έχουμε πάλι απροσδιόριστη μορφή: εξετάζουμε το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(3x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}$ . Άρα,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

(β1)  $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$ : ο  $n$ -οστός όρος της σειράς είναι ο  $a_n = ne^{-n} > 0$ . Παρατηρούμε ότι  $\sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{n}}{e} \rightarrow \frac{1}{e} < 1$ . Άρα, η σειρά συγκλίνει.

(β2)  $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n})$ : ο  $n$ -οστός όρος της σειράς είναι ο  $a_n = \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} > 0$  (διότι,  $\sin x < x$  στο  $(0, 1]$ ). Από το (α) έχουμε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n}}{(\frac{1}{n})^3} = \frac{1}{6}.$$

Από το οριακό κριτήριο σύγκρισης, η σειρά συμπεριφέρεται όμοια με την  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ . Δηλαδή, συγκλίνει.

2. (α) Θέτουμε  $u = \frac{x}{t}$ . Τότε,  $dt = -\frac{x}{u^2} du$  και

$$F(x) = \int_x^1 -x \frac{\varphi(u)}{u^2} du = \int_1^x x \frac{\varphi(u)}{u^2} du = x \int_1^x \frac{\varphi(u)}{u^2} du.$$

Άρα,

$$F'(x) = \int_1^x \frac{\varphi(u)}{u^2} du + x \frac{\varphi(x)}{x^2} = \int_1^x \frac{\varphi(u)}{u^2} du + \frac{\varphi(x)}{x}.$$

(β) Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{x}$  στο  $[0, 1]$  και τη διαμέριση  $\mathcal{P}_n = \{0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1\}$ , όπου  $x_k = \frac{k}{n}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ . Τότε,

$$\frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) = U(f, \mathcal{P}_n) \rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{2}{3}.$$

3. Η  $f$  είναι φραγμένη, άρα υπάρχει  $M > 0$  ώστε  $|f(x)| \leq M$  για κάθε  $x \in [0, 1]$ . Έστω  $\varepsilon > 0$ . Επιλέγουμε  $0 < \alpha < 1$  αρκετά μικρό ώστε να ικανοποιείται η  $2M\alpha < \frac{\varepsilon}{2}$ . Από την υπόθεση, η  $f$  είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα  $[\alpha, 1]$ , άρα υπάρχει διαμέριση  $\mathcal{Q}$  του  $[\alpha, 1]$  με την ιδιότητα

$$U(f, \mathcal{Q}) - L(f, \mathcal{Q}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Θεωρούμε τη διαμέριση  $\mathcal{P} = \{0\} \cup \mathcal{Q}$  του  $[0, 1]$ . Τότε,

$$U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P}) = \alpha(M_0 - m_0) + U(f, \mathcal{Q}) - L(f, \mathcal{Q}) < \alpha(M_0 - m_0) + \frac{\varepsilon}{2},$$

όπου

$$M_0 = \sup\{f(x) : 0 \leq x \leq \alpha\} \leq M \quad \text{και} \quad m_0 = \inf\{f(x) : 0 \leq x \leq \alpha\} \geq -M.$$

Από τις τελευταίες ανισότητες παίρνουμε  $M_0 - m_0 \leq 2M$ , άρα

$$U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P}) < 2M\alpha + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Από το κριτήριο του Riemann, η  $f$  είναι ολοκληρώσιμη στο  $[0, 1]$ .

4. Για κάθε  $i = 1, \dots, n$ , η  $f$  είναι συνεχώς διαφορίσιμη στο  $[t_{i-1}, t_i]$ . Από το δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού (για τη συνεχή συνάρτηση  $f'$ ) έχουμε

$$|f(t_i) - f(t_{i-1})| = \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} f'(t) dt \right| \leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} |f'(t)| dt.$$

Άρα,

$$\sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} |f'(t)| dt = \int_{\alpha}^{\beta} |f'(t)| dt.$$

5. (α) Η συνάρτηση  $f(x) = x$  είναι κυρτή και ομοιόμορφα συνεχής, αφού  $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$  για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}$  (άλλη επιλογή:  $f(x) = |x|$ ). Η συνάρτηση  $g(x) = x^2$  είναι κυρτή, αλλά όχι ομοιόμορφα συνεχής: αν θεωρήσουμε τις ακολουθίες  $x_n = n + \frac{1}{n}$  και  $y_n = n$ , έχουμε  $x_n - y_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$  αλλά  $f(x_n) - f(y_n) = 2 + \frac{1}{n^2} \rightarrow 2 \neq 0$ .

(β) Έστω ότι η  $f$  δεν είναι σταθερή. Υπάρχουν  $x \neq y$  στο  $\mathbb{R}$  με  $f(x) < f(y)$ . Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1.  $x < y$ : Έστω  $z > y$ . Τότε,

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y},$$

δηλαδή

$$f(z) \geq A(z) := f(y) + \frac{f(y) - f(x)}{y - x} (z - y).$$

Παρατηρούμε ότι  $\frac{f(y) - f(x)}{y - x} > 0$ , άρα  $\lim_{z \rightarrow +\infty} A(z) = +\infty$ . Έπεται ότι η  $f$  δεν είναι άνω φραγμένη.

2.  $y < x$ : Έστω  $z < y$ . Τότε,

$$\frac{f(y) - f(z)}{y - z} \leq \frac{f(x) - f(y)}{x - y},$$

δηλαδή

$$f(z) \geq B(z) := f(y) - \frac{f(x) - f(y)}{x - y} (y - z).$$

Παρατηρούμε ότι  $\frac{f(x) - f(y)}{x - y} < 0$ , άρα  $\lim_{z \rightarrow -\infty} B(z) = +\infty$ . Έπεται ότι η  $f$  δεν είναι άνω φραγμένη.

6. Αν μια συνεχής συνάρτηση  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ικανοποιεί την

$$(*) \quad g(x) = 1 + \int_0^x g(t) dt$$

για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , τότε είναι διαφορίσιμη (το δεξιό μέλος είναι διαφορίσιμη συνάρτηση) και  $g'(x) = g(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Επίσης,  $g(0) = 1$ .

Θεωρούμε την  $f(x) = e^{-x} g(x)$ . Τότε,  $f'(x) = e^{-x} (g'(x) - g(x)) = 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Άρα, η  $f$  είναι σταθερή. Δηλαδή, υπάρχει  $c \in \mathbb{R}$  ώστε  $g(x) = ce^x$ . Αφού  $g(0) = 1$ , βλέπουμε ότι  $g(x) = e^x$ .

Εύκολα ελέγχουμε ότι η  $e^x$  ικανοποιεί την (\*).

7. (α) Για το  $\int \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} dx$  θέτουμε  $\sqrt{1+x^2} = x-t$ . Τότε,  $x = \frac{t^2-1}{2t}$  απ' όπου παίρνουμε  $dx = \frac{t^2+1}{2t^2} dt$  και  $x + \sqrt{1+x^2} = 2x - t = -\frac{1}{t}$ . Υπολογίζουμε το

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{-\frac{1}{t}} \frac{t^2+1}{2t^2} dt &= -\frac{1}{2} \int \left(t + \frac{1}{t}\right) dt = -\frac{t^2}{4} - \frac{\log t}{2} + c \\ &= -\frac{(x - \sqrt{1+x^2})^2}{4} - \frac{\log(x - \sqrt{1+x^2})}{2} + c. \end{aligned}$$

(β) Για το  $\int \log(\epsilon\phi x) / \eta\mu^2 x \, dx$  εφαρμόζουμε ολοκλήρωση κατά μέρη:

$$\begin{aligned} \int \frac{\log(\epsilon\phi x)}{\eta\mu^2 x} dx &= \int (-\sigma\phi x)' \log(\epsilon\phi x) dx \\ &= -\sigma\phi x \cdot \log(\epsilon\phi x) + \int \sigma\phi x \frac{1/\sigma\upsilon\nu^2 x}{\epsilon\phi x} dx \\ &= -\sigma\phi x \cdot \log(\epsilon\phi x) + \int \frac{\sigma\varphi^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx \\ &= -\sigma\phi x \cdot \log(\epsilon\phi x) + \int \frac{1}{\eta\mu^2 x} dx \\ &= -\sigma\phi x \cdot \log(\epsilon\phi x) - \sigma\phi x + c. \end{aligned}$$

8. (α) Έχουμε  $a_n = \frac{1}{n}$  και  $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1$ . Άρα, η ακτίνα σύγκλισης της  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$  είναι ίση με 1. Αν ορίσουμε  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$  στο  $(-1, 1)$ , τότε  $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$ .

Ολοκληρώνοντας και παρατηρώντας ότι  $f(0) = 0$  συμπεραίνουμε ότι  $f(x) = \log\left(\frac{1}{1-x}\right)$  στο  $(-1, 1)$ . Αν  $x = 1$  παίρνουμε τη σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  η οποία αποκλίνει, ενώ αν  $x = -1$  παίρνουμε την εναλλάσσουσα σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  η οποία συγκλίνει.

(β) Θεωρήστε την  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{x^n}{10^n}$ .