

Θ.1. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές (α)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sqrt{n}}{n^2}$ , (β)  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ .

Θ.2. Έστω  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  κυρτή συνάρτηση.

(α) Αποδείξτε ότι  $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$ , για  $x < y < z$ .

(β) Εάν  $|f(x)| \leq M$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , αποδείξτε ότι η  $f$  είναι σταθερή συνάρτηση.

Θ.3. Εξετάστε αν είναι ολοκληρώσιμη η συνάρτηση  $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = \begin{cases} x & x \text{ ρητός} \\ x^3 & x \text{ άρρητος} \end{cases}$ ,  $x \in [0,1]$ .

Θ.4. Αποδείξτε ότι  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^8} (1^7 + 2^7 + \dots + n^7) = \frac{1}{8}$ .

Θ.5. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα (α)  $\int \frac{1+\cos x}{1-\sin x} dx$ , (β)  $\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}} dx$ .

Θ.6. Αποδείξτε ότι η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$  συγκλίνει και υπολογίστε μια προσεγγιστική τιμή του αθροίσματος με σφάλμα μικρότερο του 0.1.

Θ.7. Έστω  $f: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f'(x_0) > 0$  για κάποιο  $x_0 \in (\alpha, \beta)$ . Αποδείξτε ότι υπάρχει  $\delta > 0$  με  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq (\alpha, \beta)$  ώστε να έχουμε  $f(x) < f(x_0)$  για  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$  και  $f(y) > f(x_0)$  για  $y \in (x_0, x_0 + \delta)$ .

Θ.8. Έστω  $f: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση.

Εάν για το  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  ισχύει  $f''(x_0) = 0$  και  $f'''(x_0) \neq 0$ , αποδείξτε ότι το  $x_0$  είναι βείο καμπής της  $f$ .

Θ.9. Να ερευνά η συνάρτηση  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n!} x^n$ .

Θ.10. Αποδείξτε ότι η ακολουθία  $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n$ ,  $n=1,2,\dots$  είναι συγκλίνουσα.

Συμείωση: Απαλείψτε σε 8 (οκτώ) θέματα.

Ονοματεπώνυμο :

Α. Μ. :