

Εξετάσεις Απειροστικού Λογισμού II
6 Ιουνίου 2005

1. (α) Βρείτε το

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}.$$

(β) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} \right).$$

2. (α) Έστω $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υπολογίστε την παράγωγο της συνάρτησης

$$F(x) = \int_1^x \varphi\left(\frac{x}{t}\right) dt, \quad x > 0.$$

(β) Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \frac{2}{3}.$$

3. Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση, ώστε για κάθε α με $0 < \alpha < 1$ η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha, 1]$. Αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$.

4. Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$ και $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση. Αν $\mathcal{P} = \{\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta\}$ είναι διαμέριση του $[\alpha, \beta]$, αποδείξτε ότι

$$\sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f'(t)| dt.$$

5. (α) Βρείτε δύο κυρτές συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ώστε η f να είναι ομοιόμορφα συνεχής επί του \mathbb{R} και η g όχι.

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Αν η f είναι άνω φραγμένη αποδείξτε ότι είναι σταθερή.

6. Αποδείξτε ότι υπάρχει μοναδική συνεχής συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα

$$g(x) = 1 + \int_0^x g(t) dt$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Βρείτε την g .

7. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} dx, \quad \int \frac{\log(\exp x)}{\eta \mu^2 x} dx.$$

8. (α) Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης R της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. Με ποιά γνωστή συνάρτηση στο $(-R, R)$ ισούται αυτή η δυναμοσειρά; Τι συμβαίνει για $x = R$ και $x = -R$;

(β) Δώστε παράδειγμα δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ με ακτίνα σύγκλισης 10, που να συγκλίνει για $x = 10$, αλλά όχι για $x = -10$.

Απαντήστε σε όλα τα θέματα. Τα θέματα είναι βαθμολογικά ισοδύναμα. Κυκλώστε στην πρώτη σελίδα του γραπτού σας τα θέματα που απαντήσατε.

Καλή Επιτυχία!