# Απειροστικός Λογισμός II

Εξετάσεις 4 Ιουλίου 2003

**1.** Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απολύτως, εξετάστε αν συγκλίνουν οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$. Επίσης αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ συγκλίνει, εξετάστε αν συγκλίνουν οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

**2.** Εξετάστε αν συγκλίνουν οι σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n2^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2}.$$

**3.** **(ι)** Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής και μη αρνητική συνάρτηση και $\xi \in [a,b]$ με $f(\xi) \neq 0$. Αποδείξτε ότι $\int_a^b f(t)dt \neq 0$.

**(ιι)** Αν $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής, μη σταθερή και $\int_a^b f(t)dt = 0$, αποδείξτε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in [a,b]$ με $f(x_1)f(x_2) < 0$.

**4.** Εξετάστε αν είναι ολοκληρώσιμη η συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \notin \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$

**5.** Να υπολογισθεί το όριο $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4} \int_0^{x^2} e^t \,\eta\mu\, t \, dt$.

**6.** Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση που λαμβάνει τοπικό ελάχιστο στο σημείο $x_o \in (a,b)$. Αποδείξτε ότι η $f$ στο $x_o$ λαμβάνει *ολικό* ελάχιστο.

**7.** Να ορίσετε τη συνάρτηση $y = \log x$ $(x > 0)$ μέσω ολοκληρώματος και να αποδείξετε ότι ισχύουν:

$$(a) \quad \log(st) = \log s + \log t \quad \forall s,t > 0$$

$$(b) \quad 1 - \frac{1}{x} \leq \log x \leq x - 1 \quad \forall x > 0.$$

**8.** **(ι)** Υπολογίστε το πολυώνυμο Taylor βαθμού $n$ στο σημείο 0 των συναρτήσεων

$$f(x) = e^x \quad \text{και} \quad g(x) = x^2 e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**(ιι)** Βρείτε $n \in \mathbb{N}$ ώστε $g^{(n)}(0) = 156$.

**9.** Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$(a) \int \frac{1}{1 + \eta\mu\, x + \sigma\upsilon\nu\, x} dx \qquad (b) \int \frac{xe^x}{(1+x)^2} dx.$$

**10.** Βρείτε ικανή και αναγκαία συνθήκη για τους αριθμούς $a, b, c > 0$ ώστε η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^a \left(\eta\mu \frac{1}{n^b}\right) \left(\sigma\upsilon\nu \frac{1}{n^c}\right)$$

να συγκλίνει (σε πραγματικό αριθμό).

*Να γραφούν 8 θέματα.*

*Σημειώστε στην πρώτη σελίδα του γραπτού σας τους αριθμούς των θεμάτων που απαντήσατε (βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο αριθμό).*

*Μαζί με το γραπτό σας να παραδίδετε και τα θέματα.*

**Καλή επιτυχία!**