Διαγραμμικά παιδιά δεκέμβριος ...

ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ. Τα **έντονα(bold)** γράμματα δηλώνουν διανύσματα. Τα θέματα είναι ισοδύναμα. Κάθε διαγωνιζόμενος επιλέγει 4 θέματα για να γράψει. Για το καλό όλων απαγορεύεται το κάπνισμα.

1. Θεωρούμε στο επίπεδο σημεία Α, Β, Ο, Γ, όπου Α≠Β, τα Α, Β και Ο είναι συνευθιακά, το Γ κείται εκτός της ευθείας ΑΒ και η ευθεία ΟΓ είναι κάθετος προς την ευθεία ΑΒ. Εστω κ θετικός πραγματικός αριθμός. Εστω Μ, Ν τυχόντα σημεία του επιπέδου, τέτοια ώστε, τα Γ, Μ, Ν είναι συνευθειακά, το Μ κείται επί της ευθείας ΑΒ και **ΓΜ•ΓΝ**=κ. Να αποδειχθεί ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Ν, όταν το Μ διαγράφει την ευθεία ΑΒ, είναι περιφέρεια κύκλου του οποίου το κέντρο κείται επί της ευθείας ΟΓ. (ΦΙΛΙΚΗ-ΠΡΟΑΙΡΕΤΙΚΗ ΣΥΜΒΟΥΛΗ. Θεωρείστε στο επίπεδο σύστημα αξόνων, όπου ο ένας των αξόνων είναι η ευθεία ΟΓ).

2. Α) Δίδεται η εξίσωση $12\chi^2+11\zeta^2+4\psi^2-12\chi\zeta+12\psi\zeta+4\zeta-4=0$. Να ελεγχθεί αν παριστάνει κωνική επιφάνεια και σε καταφατική περίπτωση να υπολογίσετε το κέντρο και μια οδηγό καμπύλη της επιφάνειας.

Β) Να αποδειχθεί ότι τα παρακάτω 3 επίπεδα

$\chi+\psi+5\zeta+4=0$ $\quad$ $\chi+2\psi+4\zeta+4=0$ $\quad$ και $\quad$ $\chi+3\psi+3\zeta+4=0$ $\quad$ τέμνονται κατα ευθεία γραμμή

3. Θεωρούμε τις δύο ευθείες

$\varepsilon_1 : (\chi+1)/2=(\psi+1)/3=(\zeta+1)/4$ και $\varepsilon_2 : (\chi+5)/3=(\psi+6)/4=(\zeta+7)/5$

α) Να εξετασθεί αν οι ε_1 και ε_2 είναι συνεπίπεδες.

β) Αν η απάντηση στο ερώτημα α) είναι καταφατική, τότε να βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που ορίζουν.

4. Θεωρούμε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Οχψζ στον χώρο R^3, ο οποίος είναι εφοδιασμένος με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο. Θεωρούμε τα σημεία του χώρου Μ=(1, -1, 1), ω=(2, -1, 1), καθώς και τα υποσύνολά του ε={ $X\in R^3$: **ΧΜ**=λω όπου $\lambda\in R$} και $\Pi=\{(\chi, \psi, \zeta)\in R^3 : 4\chi-2\psi+2\zeta=1\}$.

α) Τι γεωμετρικά σχήματα είναι τα υποσύνολα ε και Π ?

β) Εστω ότι $A, B\in\Pi$, $\Gamma, \Delta\in R^3$, **ΜΓ**=(<**ΜΑ**, ω>/<ω, ω>)ω και, **ΜΔ**=(<**ΜΒ**, ω>/<ω, ω>)ω. Να αποδείξετε ότι $\Gamma=\Delta\in\Pi$, ε

γ) Να αποδείξετε ότι (ΜΓ)≤(ΜΑ)

5. Θεωρούμε τα στοιχεία ω=(1, 1, 1), θ=(1, 1, 0), φ=(1, 0, 0), του R^3.

α)

(i) Δείξτε ότι τα ω, θ, φ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του R^3

(ii) Αν $(\kappa, \lambda, \mu)\in R^3$, τότε $(\kappa, \lambda, \mu)=\mu\omega+(\lambda-\mu)\theta+(\kappa-\lambda)\varphi$

β) Δείξτε ότι ο τύπος $<(\kappa, \lambda, \mu), (\alpha, \beta, \gamma)> = \mu\gamma+(\lambda-\mu)(\beta-\gamma)+(\kappa-\lambda)(\alpha-\beta)$ ορίζει εσωτερικό γινόμενο του R^3, του οποίου τα τρία διανύσματα ω, θ, φ, αποτελούν ορθοκανονική βάση.

γ) Να ευρεθεί διάνυσμα ψ του R^3, τέτοιο ώστε

(i) Το ψ είναι κάθετο προς το (0, 1, 0) (κατά την έννοια του εσωτερικού γινομένου του ερωτήματος β)).

(ii) Το ψ ανήκει στον Γραμμικό υπόχωρο που παράγουν τα (0, 1, 0) και (0, 0, 1).

6. Εστω α, β, γ είναι πραγματικοί αριθμοί. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi: R^2xR^2 \to R$, που έχει τύπο $\varphi((\chi_1, \chi_2), (\psi_1, \psi_2))= \chi_1\psi_1+\alpha\chi_1\psi_2+\beta\chi_2\psi_1+\gamma\chi_2\psi_2$, για καθε $(\chi_1, \chi_2), (\psi_1, \psi_2)\in R^2$.

α) Να ευρεθεί μία ικανή και αναγκαία συνθήκη που θα πρέπει να ικανοποιούν τα α, β, γ, έτσι ώστε η φ να είναι εσωτερικό γινόμενο.

β) Εστω α= -3, β= -3, και γ=12. Εστω ο υπόχωρος του R^2, $A=\{\lambda(1, 0) : \lambda\in R\}$. Να ευρεθούν διανύσματα κ, λ του R^2, που να είναι κάθετα (ως προς φ) μεταξύ τους, με $\kappa\in A$ και (0, 1)=κ+λ.