ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ. ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2000

1) Α)(1,5 μοναδες). Έστω ότι $\varphi : R^2 x R^2 \to R$, είναι μία συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο $\varphi((\chi_1, \chi_2), (\psi_1, \psi_2)) = 2\chi_1\psi_1 + \chi_2\psi_2 + \chi_1\psi_2 + \chi_2\psi_1$, όπου τα $\chi_1, \psi_1, \chi_2, \psi_2$ είναι πραγματικοί αριθμοί. α) Να αποδειχθεί ότι η φ είναι εσωτερικό γινόμενο στον R^2.
β) Να ευρεθεί μία ορθοκανονική, (ως προς το φ), βάση του R^2.

Β)(1 μοναδα). Να ευρεθεί η εξίσωση επιπέδου Π, που περιέχει την ευθεία ε_1 και είναι παράλληλο προς την ευθεία ε_2, όπου $\varepsilon_1 : (\chi+2)/3=\psi-1=z/4$, $\varepsilon_2 : (2x-1)/4=(\psi+1)/2=z$

2) Α)(1 μονάδα). Εστω ότι Ο, Α, Β, Γ είναι σημεία του R^3, όπου τα Α, Β, Γ δεν είναι συνευθειακά.. Να αποδειχθεί ότι το διάνυσμα **ΟΑxΟΒ + ΟΒxΟΓ+ΟΓxΟΑ**, είναι κάθετο προς το επίπεδο ΑΒΓ. (ΣΧΟΛΙΟ. Τα έντονα γράμματα δηλώνουν διάνυσμα).

Β)(1,5 μονάδες). Έστω α, β, γ, είναι πραγματικοί αριθμοί, έστω ο πίνακας $A=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & 1/2 \end{pmatrix}$, και Τ: $R^2 \to R^2$ είναι μία Γραμμική Απεικόνιση στο R^2, που ορίζεται από τον τύπο $\varphi(\chi_1, \chi_2) = (\chi_1, \chi_2) \bullet A$, για $\chi_1, \chi_2 \in R$. Έστω ότι η φ είναι Γραμμική Ισομετρία και ότι η Ορίζουσα της Α είναι 1. Να βρεθούν τα α, β, γ.

3) Θεωρούμε την απεικόνιση φ: $R^3 x R^3 \to R$, που ορίζεται από τον τύπο $\varphi((\kappa, \lambda, \mu), (\kappa', \lambda', \mu')) = (\kappa+\lambda)(\kappa'+\lambda') + (\lambda-\mu)(\lambda'-\mu') + \mu\mu'$, όπου τα κ, λ, μ, κ΄, λ΄, μ΄ ανήκουν στο R.
Α)(1 μονάδα). Να αποδειχθεί ότι η φ είναι εσωτερικό γινόμενο στο R^3.
Β)(1,5 μονάδα). Εστω $\varepsilon_1=(-1, 0, 0)$, $\varepsilon_2=(0, 1, 0)$. Εστω ο υπόχωρος του R^3, $A=\{\lambda\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2 : \lambda, \mu \in R\}$. Να ευρεθεί $\chi \in R^3$, τέτοιο ώστε $\varepsilon_2 - \chi \in A$, και το χ να είναι κάθετο, (ως προς την φ), στο ε_1.

4) Στο R^3 θεωρούμε τα υποσύνολα $\Pi=\{(\chi, \psi, z) \in R^3 : -2\chi-2\psi-2z=1\}$, $\varepsilon=\{(\chi, \psi, z) \in R^3 : \chi-4=\psi-4=z-4\}$.

Α)(1,5 μονάδα). α) Τι είδους σχήματα είναι τα Π και ε ? β) Να αποδειχθεί ότι αν $A, B \in \Pi$ και $\Gamma, \Delta \in \varepsilon$, τότε **ΑΒ•ΓΔ=0**. Δώστε μιά γεωμετρική ερμηνεία σε αυτό. γ) Να βρεθεί η τομή των Π και ε.

Β)(1 μονάδα). Εστω α, β, γ είναι πραγματικοί αριθμοί και Α=(α, β, γ). Να βρεθούν $\chi, \psi, z \in R$, τέτοιοι ώστε αν Μ=(χ, ψ, z), τότε $M \in \Pi$, και επιπλέον $(A\Lambda) \geq (AM)$ για κάθε $\Lambda \in \Pi$.

5) Εστω $\varepsilon_1=(1, 0, 0)$, $\varepsilon_2=(0, 1, 0)$, $\varepsilon_3=(0, 0, 1)$ είναι διανύσματα του R^3, και φ: $R^3 x R^3 \to R$ είναι εσωτερικό γινόμενο, τέτοιο ώστε $\varphi(\varepsilon_\kappa, \varepsilon_\kappa)=2$ αν κ=1, 2, 3, και $\varphi(\varepsilon_\kappa, \varepsilon_\lambda)=1$ αν $\kappa \neq \lambda$ και κ, λ=1, 2, 3. Εστω ότι $A=\{(\chi, \psi, \zeta) \in R^3 : \chi+\psi+\zeta=0\}$ είναι υπόχωρος του R^3. Να ευρεθεί $\alpha \in A$, τέτοιο ώστε το διάνυσμα α–(1, 2, 1), είναι κάθετο, (ως προς το φ), προς όλα τα διανύσματα του Α.

6. Α)(1 μονάδα). Θεωρούμε την επιφάνεια που έχει εξίσωση $\chi^2-\psi^2+\zeta^2-4\chi+2\psi+6\zeta+12=0$. Ερωτάται, είναι κωνική επιφάνεια ? ΝΑΙ η ΟΧΙ ? Εξηγείστε την απάντηση σας.
Β)(1,5 μονάδες). Εστω Α, Β είναι 2 διαφορετικά σημεία του επιπέδου, και Ο επίσης σημείο του επιπέδου. α) Να αποδειχθεί ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου τέτοιων ώστε (ΜΑ)=2(ΜΒ), είναι περιφέρεια. β) Αν Κ το κέντρο της περιφερείας αυτής, τότε να βρεθούν πραγματικοί αριθμοί α, β, τέτοιοι ώστε **ΟΚ=αΟΑ+βΟΒ**

ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ. **Τα έντονα κεφαλαία γράμματα δηλώνουν διανύσματα**. Τα 6 θέματα είναι ισοδύναμα. Για βαθμό ΑΡΙΣΤΑ(10), πρέπει να λύθουν 4 από τα 6 θέματα.

Οι διδάσκοντες σας εύχονται καλή επιτυχία