ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΣ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ I

Αθήνα, 8 Σεπ. 2000

ΘΕΜΑ 1ον. Έστω σύνολο $S = \{(1,2,-1,0),\ (3,-4,-5,2),\ (-1,3,2,-1)\} \subseteq \mathbf{R}^4$.

1) Βρείτε υποσύνολο $S_1 \subseteq S$ που να είναι γραμμικά ανεξάρτητο.
2) Βρείτε υποσύνολο $S_2 \subseteq \mathbf{R}^4$ έτσι ώστε $S_1 \cup S_2$ να είναι βάση του $\mathbf{R}^4$
3) Δείξτε ότι $\langle S_1 \rangle \cap \langle S_2 \rangle = \{0\} \Leftrightarrow S_1 \cap S_2 = \varnothing$.
4) Να ορίσετε γραμμική απεικόνιση $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ με $\operatorname{Ker} f = \langle S_1 \rangle$ και $\operatorname{Im} f = \langle S_2 \rangle$.
5) Να βρεθεί ο πίνακας $A = (f : \bar{e})$ της f ως προς την κανονική βάση του $\mathbf{R}^4$

ΘΕΜΑ 2ον. Έστω $f : V \to W$ γραμμική απεικόνιση. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς. (Να δικαιολογηθούν πλήρως οι απαντήσεις σας)

1) Η f είναι επί έπεται ότι $\dim V \le \dim W$.
2) $\dim V = \dim W$ έπεται ότι η f είναι $1-1$ και επί.
3) Η f είναι ισομορφισμός έπεται ότι $\dim V = \dim W$.
4) Αν $V, W \le \mathbf{R}^3$ με $\dim V = \dim W = 2$ τότε $V \cap W = \{0\}$.
5) Αν A και B όμοιοι πίνακες και $\lambda \in \mathbf{R}$, τότε και οι πίνακες $A - \lambda I$ και $B - \lambda I$ είναι όμοιοι και έχουν ίσες ορίζουσες.

ΘΕΜΑ 3ον. 1) Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Να βρεθεί γραμμική απεικόνιση $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, έτσι ώστε $A = (f : \bar{e}, \bar{a})$ όπου $\bar{e}$ η συνήθης βάση του $\mathbf{R}^3$ και $\bar{a} = \{(1,0,0),\ (1,1,0),\ (1,1,1)\}$.

2) Να γράψετε την μορφή των γραμμικών συστημάτων m εξισώσεων με n αγνώστους και συντελεστές πραγματικούς, με σύνολο λύσεων $\{(2t,1,3t) \quad t \in \mathbf{R}\}$

ΘΕΜΑ 4ον. 1) Έστω $A \in \mathbf{R}^{2\times 2}$ με $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ και έστω M το σύνολο των πινάκων $B \in \mathbf{R}^{2\times 2}$ με την ιδιότητα AB = BA. Να δειχθεί ότι το M είναι υπόχωρος του $\mathbf{R}^{2\times 2}$, να βρεθεί μία βάση του και η διάστασή του.

2) Λέμε ότι ο $m \times n$ πίνακας A έχει δεξιά αντίστροφο, αν υπάρχει $n \times m$ πίνακας C τέτοιος ώστε AC = I. Αν ο A έχει δεξιά αντίστροφο, δείξτε ότι οι στήλες του A παράγουν τον χώρο $\mathbf{R}^m$. Ισχύει το αντίστροφο;

ΘΕΜΑ 5ον. Έστω ο διανυσματικός χώρος $\mathbf{R}^2$ και η κανονική του βάση $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$. Θεωρούμε τις γραμμικές απεικονίσεις g_1, g_2 από το $\mathbf{R}^2$ στο $\mathbf{R}^2$, που ορίζονται ως εξής: $e_1 \xrightarrow{g_1} 0$, $e_2 \xrightarrow{g_1} e_1$, και $e_1 \xrightarrow{g_2} 0$, $e_2 \xrightarrow{g_2} e_2$. Να δείξετε ότι: α) Για κάθε γραμμική απεικόνιση $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ με $\operatorname{Ker} g = \langle e_1 \rangle$ υπάρχουν μοναδικά $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$ τέτοια ώστε $g = \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2$. Υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$, έτσι ώστε η γραμμική απεικόνιση $g = \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2$ να είναι επί;

Απαντήστε στο πρώτο Θέμα, και σε τρία από τα υπόλοιπα θέματα. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ