ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΣ ΧΕΙΜΕΡΙΝΟΥ ΕΞΑΜΗΝΟΥ
ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

Αθήνα, 24 Ιαν. 2000

ΘΕΜΑ 1ον. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες είναι λάθος;
α) Έστω διανύσματα $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbf{R}^5$. Αν τα διανύσματα αυτά είναι γραμμικά εξαρτημένα, τότε και τα a_1, a_2, a_3 είναι γραμμικά εξαρτημένα.
β) Έστω πίνακας $A=(a_{ij})\in F^{n\times n}$. Για $n\geq i, j\geq 1$, υποθέτουμε ότι η ελάσσονα ορίζουσα του στοιχείου a_{ij}, είναι διάφορος του 0. Τότε ο A είναι αντιστρέψιμος.
γ) Αν $A \in F^{m\times n}$ και η τάξη του A είναι $(m+n)/2$, τότε $m = n$.
δ) Αν ένα γραμμικό σύστημα m εξισώσεων με n αγνώστους έχει μία μοναδική λύση τότε $m \geq n$.
ε) Αν $f\in L(R^5, R^3)$ είναι επιμορφισμός, τότε η τάξη της f είναι 5
(Σημείωση. Οι απαντήσεις σας να είναι <u>**πλήρως**</u> δικαιολογημένες).

ΘΕΜΑ 2ον. α) Έστω S ο διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbf{R}^4$, που παράγεται από το σύνολο των διανυσμάτων: $\{(1,0,1,1), (1,0,2,4), (1,0,0,-2)\}$. Να βρεθεί μία βάση του S, και να επεκταθεί η βάση αυτή σε μία βάση του $\mathbf{R}^4$.
β) Έστω dimU = 8 και M, N δύο υπόχωροι του U με dimM = dimN = 5.
(i) Να αποδειχθεί ότι $5 \geq \dim M\cap N \geq 2$.
(ii) Να εξετάσετε αν υπάρχει $f \in L(U)$, τέτοια ώστε $\mathrm{Ker} f = M\cap N$ και $\mathrm{Im} f = M+N$.

ΘΕΜΑ 3ον. α) Έστω V ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διαστάσεως. Να εξετάσετε αν υπάρχει W υπόχωρος του V και $f \in L(V)$, τέτοια ώστε $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Im} f =$ W.
β) Να βρεθεί γραμμική απεικόνιση $f:\mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ με $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Im} f = \langle (1,2,-1,0), (0,1,1,0)\rangle$.

ΘΕΜΑ 4ον. Έστω $A\in \mathbf{R}^{4\times 2}$; $B\in \mathbf{R}^{2\times 4}$ και C = AB, D=BA. Να δειχθεί ότι
α) Η τάξη του C είναι ≤ 2.
b) Το ομογενές σύστημα CX = 0 έχει πάντα μη μηδενικές λύσεις.
γ) adjC = 0.
δ) Να ευρεθούν πίνακες A, B, τέτοιοι ώστε
(i) Το ομογενές σύστημα DX = 0 δεν έχει μη μηδενικές λύσεις.
(ii) $\mathrm{adj} D \neq 0$

ΘΕΜΑ 5ον. Έστω ο διανυσματικός χώρος $\mathbf{R}^2$ και η κανονική του βάση $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$. Θεωρούμε τις γραμμικές απεικονίσεις f_1, f_2 από το $\mathbf{R}^2$ στο $\mathbf{R}^2$, που ορίζονται ως εξής: $e_1 \xrightarrow{f_1} 0$, $e_2 \xrightarrow{f_1} e_1$, και $e_1 \xrightarrow{f_2} 0$, $e_2 \xrightarrow{f_2} e_2$. Να δείξετε ότι: α) Για κάθε γραμμική απεικόνιση $f:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ με $\mathrm{Ker} f = \langle e_1\rangle$ υπάρχουν μοναδικά $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$ τέτοια ώστε $f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$. Υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$, έτσι ώστε η γραμμική απεικόνιση $f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ να είναι επί;

Για βαθμό ΑΡΙΣΤΑ, πρέπει να απαντήστε στο πρώτο Θέμα, και σε τρία από τα 4 υπόλοιπα
Καλή επιτυχία σε όλους/λες