Ενδιάμεση Εξέταση στο μάθημα
«Απειροστικός Λογισμός Ι» 10/1/2003

Θέμα 1 : (α) Εστω $a \in \mathbf{R}$, Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία αρρήτων (χ_n) έτσι ώστε $x_n > a \;\; \forall n \in \mathbf{N} \;\; \kappa\alpha\iota \lim_{n} x_n = a$

(β) Αν (α_n) είναι μία ακολουθία πραγματικών αριθμών έτσι ώστε $\lim_n a_n = 5$ δείξτε ότι η (α_n) είναι φραγμένη **μονάδες 2**

Θέμα 2° : (α) Έστω A είναι υποσύνολο του $\boldsymbol{R}$, $A \neq 0$. Δώστε τον ορισμό του infimum του A, και διατυπώσατε ένα ισοδύναμο χαρακτηρισμό του.

(β) Να βρείτε αν υπάρχουν τα sup, inf, max, min των παρακάτω συνόλων

$A=\{3n : \; n \in \mathbf{N} \;\}$, $B = \{\pm n, n \in \mathbf{N}\}$, $\Gamma=\{3 + \frac{1}{n}, n = 1,2,\ldots\} \cup \{1-\frac{1}{n}, n1,2,\ldots\}$

μονάδες 2

Θέμα 3° (α) Μελετήσατε ως προ τη συνέχει τις συναρτήσεις

(ι) $f : \mathbf{N}-\{0\} \to R \quad \mu\varepsilon \quad f(x) = \frac{1}{x} \forall x \in N-\{0\}$

(ιι) $\phi : (0,+\infty) \to R \quad \mu\varepsilon \quad \phi(x) = \frac{1}{x} \forall x \in (0,+\infty)$ και $\varphi(0) = 0$

(β) Δείξτε ότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία ακεραίων είναι τελικά σταθερή

μονάδες 3

Θέμα 4° Έστω α πραγματικός αριθμός. Τότε για κάθε $n \in \mathbf{N} - \{0\}$ υπάρχει ρητός P_n για τον οποίο ισχύει

$$\alpha - \frac{1}{n} < P_n < a \qquad (ι)$$

Άρα για την ακολουθία P_n έχουμε

$$\lim_n P_n = a \qquad (ιι)$$

Απαντήστε στις ακόλουθες ερωτήσεις

(I) Τι αποδεικνύεται στην παραπάνω απόδειξη;
(II) Διατυπώστε την ιδιότητα από την οποία προκύπτει η (ι)
(III) Διατυπώστε την ιδιότητα από την οποία προκύπτει η (ιι)
(IV) Η ακολουθία P_n έτσι όπως έχει επιλεγεί είναι κατ' ανάγκην αύξουσα;
(V) Αν για κάθε $n \in \mathbf{N}$ επιλέγουμε ρητό P_n ώστε να ισχύει $a - \frac{n^2}{n^2+5n} < P_n < a$ προκύπτει πάλι $\lim_n P_n = a$; **μονάδες 3**

ΝΑ ΕΧΕΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ