Εξετάσεις Απειροστικού Λογισμού I

1-9-2000

1ον Έστω ακολουθία πραγματικών αριθμών (a_n) ώστε $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$. Εξετάστε αν τα σύνολα $A=\{n\in\mathbb{N}: 1{,}8<a_n<2\}$, $B=\{n\in\mathbb{N}: a_n<1{,}99\}$, $\Gamma=\{n\in\mathbb{N}: 1{,}99<a_n\}$, $\Delta=\{n\in\mathbb{N}: a_n<2{,}0$ $E=\{n\in\mathbb{N}: 2{,}0001<a_n\}$ είναι πεπερασμένα ή άπειρα. Αν κάποιο είναι άπειρο εξετάσετε αν το συμπλήρωμά του είναι πεπερασμένο ή άπειρο.

2ον α) Αποδείξτε ότι: υπάρχει $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ ώστε $x=\text{συν}x$ και ότι υπάρχει $y\in(0,1)$ ώστε $y\cdot 2^y=1$.

β) Έστω $X\subseteq\mathbb{R}$, $K>0$ και $f: X\to\mathbb{R}$ συνάρτηση ώστε $|f(x)-f(y)|\le K|x-y|$ $\forall\, x,y\in X$. Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχ επί του συνόλου X.

3ον α) Υπολογίστε το όριο $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2-n-5}$.

β) Έστω πολυώνυμο $P(x)=a_m x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\dots+a_1x+a_0$, $a_i\in$ με $a_m>0$ και $m\ge1$.

(i) Δείξτε ότι υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $\forall\, n>n_0$ η παράσ ση $\sqrt[n]{P(n)}$ είναι καλά ορισμένη και έχει νόημα πραγμα κού αριθμού.

(ii) Υπολογίστε το όριο $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{P(n)}$.

4ον α) Υποθέτουμε ότι η σειρά πραγματικών αριθμών $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ σ κλίνει προς πραγματικό όριο s και ότι $na_n\to0$. Δείξτ ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n+1})$ συγκλίνει και να βρεθεί το όρ

β) Έστω $f:[0,1]\to[5,6]$ γνήσια φθίνουσα συνάρτηση ώστε $f([0,1])=[5,6]$. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής.

Α) Κάθε θέμα βαθμολογείται με τρεις μονάδες. Μπορείτε να γράψετε όλα τα θέματα. Βάση είναι το πέντε και άριστα το δέκα.

Β) Σημειώστε οπωσδήποτε στην πρώτη σελίδα του γραπ σας τους αριθμούς των θεμάτων τα οποία επιχειρήσατε.

Καλή επιτυχία