Απειροστικός Λογισμός Ι

Εξετάσεις 21 Ιανουαρίου 2002

1. Αν $A = \{x \in \mathbb{Q} : (x-1)(x+\sqrt{2}) < 0\}$ και $B = \{5 + \frac{6}{n} : n = 1, 2, \ldots\} \cup \{7 - 8n : n \in \mathbb{N}\}$, να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα supremum, maximum, infimum και minimum των A και B. (Δεν απαιτούνται εδώ αποδείξεις των ισχυρισμών σας.) **(0.5μ)**

2. Να υπολογισθούν, αν υπάρχουν, τα όρια των ακολουθιών: **(1.5μ)**

$$\frac{n^{81}}{n!}, \quad \frac{\sqrt[n]{n}}{n}, \quad \frac{n}{a^n} \ (a > 0).$$

3. Αν $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ αποδείξτε ότι $\lim_n a_n = +\infty$ αν και μόνον αν $\lim_n \frac{1}{a_n} = 0$. **(1μ)**

4. Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών, (a_{k_n}) υπακολουθία της (a_n) και $a \in \mathbb{R}$. Αν $\lim_n a_n = a$ δείξτε ότι $\lim_n a_{k_n} = a$. **(1μ)**

5. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση, συνεχής στο x_o και $f(x_o) = 1$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $f(x) > \frac{3}{4}$ για κάθε $x \in (x_o - \delta, x_o + \delta)$. **(1μ)**

6. Δίδεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 10x^3$. Χρησιμοποιώντας τον (ϵ, δ) ορισμό, να αποδείξτε ότι είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 1$. **(1μ)**

7. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση ώστε $f(x)$ ρητός για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή. **(1.5μ)**

8. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Δείξτε ότι

(ι) αν $x_o \in \mathbb{R}$ το όριο $\lim_{x \to x_o} f(x)$ δεν υπάρχει και

(ιι) το $\lim_{x \to 0} x f(x)$ υπάρχει και είναι 0. **(1.5μ)**

9. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f([a, b]) \subseteq [a, b]$. Δείξτε ότι υπάρχει $x \in [a, b]$ με $f(x) = x$. **(1.5μ)**

10. Έστω $0 < c < 1$ και συνάρτηση $f : [a, b] \to [a, b]$ ώστε $|f(x) - f(y)| \le c|x - y|$ για κάθε $x, y \in [a, b]$.

(ι) Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο $[a, b]$.

(ιι) Έστω $x_1 \in [a, b]$. Θέτουμε $x_{n+1} = f(x_n)$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$. Δείξτε ότι η ακολουθία (x_n) συγκλίνει και, αν $l = \lim_n x_n$, τότε $f(l) = l$. **(2μ)**

Σημειώστε στην πρώτη σελίδα του γραπτού σας
(α) το τμήμα στο οποίο ανήκετε
(β) τους αριθμούς των θεμάτων που απαντήσατε (βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο αριθμό).
Μαζί με το γραπτό σας να παραδίδετε και τα θέματα.

Καλή επιτυχία!