Τμήμα Μαθηματικών – Πανεπιστήμιο Αθηνών
Απειροστικός Λογισμός Ι
9 Σεπτεμβρίου 2005

1. (α) Δίνεται το σύνολο

$$A = \left\{ \frac{(-1)^n m}{n+m} : m, n = 1, 2, \ldots \right\}.$$

Δείξτε ότι το A είναι φραγμένο και βρείτε τα $\sup A$, $\inf A$. Εξετάστε αν το A έχει μέγιστο ή ελάχιστο στοιχείο.

(β) Σωστό ή λάθος; Αν το $B \subset \mathbb{R}$ είναι μη κενό και φραγμένο, και αν $\sup B - \inf B = 1$, τότε υπάρχουν $x, y \in B$ ώστε $x - y = 1$ (αιτιολογήστε την απάντηση σας).

2. (α) Χρησιμοποιώντας μόνο τον ορισμό του ορίου ακολουθίας και την Αρχιμήδεια ιδιότητα των πραγματικών αριθμών, δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+2} = 0.$$

(β) Σωστό ή λάθος; Αν $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και η (a_n) δεν είναι άνω φραγμένη, τότε $a_n \to +\infty$ (αιτιολογήστε την απάντηση σας).

3. Για καθεμιά από τις παρακάτω ακολουθίες εξετάστε αν συγκλίνει και, αν ναι, βρείτε το όριο της:

$$a_n = \frac{\cos(n^{10})}{\sqrt{n}}, \quad \beta_n = \frac{10^n}{n!}, \quad \gamma_n = \frac{\sqrt[n]{1^n + 2^n + \cdots + n^n}}{n}.$$

4. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και έστω $a_1 \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε $a_{n+1} = f(a_n)$ για $n = 1, 2, \ldots$. Δείξτε ότι αν $a_n \to a$ για κάποιον $a \in \mathbb{R}$, τότε $f(a) = a$.

5. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ αύξουσα και συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει ακριβώς ένας πραγματικός αριθμός x_0 με την ιδιότητα $f(x_0) + x_0 = 0$. [*Υπόδειξη:* Παρατηρήστε ότι αν $x > 0$ τότε $f(x) \geq f(0)$ ενώ αν $x < 0$ τότε $f(x) \leq f(0)$.]

6. Έστω $f : [0,1] \to [0,1]$ συνεχής και επί συνάρτηση. Δείξτε ότι αν $g : [0,1] \to [0,1]$ είναι συνεχής συνάρτηση, τότε υπάρχει $x \in [0,1]$ ώστε $g(x) = f(x)$.

7. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{αν } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο 0. Δείξτε ότι η f είναι ασυνεχής σε κάθε $y \neq 0$. Είναι συνεχής στο σημείο 0;

8. (α) Διατυπώστε το Θεώρημα Bolzano–Weierstrass.

(β) Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Bolzano–Weierstrass δείξτε ότι κάθε συνεχής συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι άνω φραγμένη.

Να απαντήσετε και στα οχτώ θέματα, τα οποία είναι βαθμολογικά ισοδύναμα. Στην πρώτη σελίδα του γραπτού σας, κυκλώστε τους αριθμούς των θεμάτων που απαντήσατε. Μαζί με το γραπτό σας να παραδίδετε και τα θέματα.

Καλή επιτυχία