Απειροστικός Λογισμός I

Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2002

1. Αν $A = \{x \in \mathbb{Q} : (x-1)(x+\sqrt{2}) > 0\}$ και $B = \{4 + \frac{6}{n^2} : n = 1, 2, \ldots\} \cup \{8 - 9n^2 : n = 1, 2, \ldots\}$, να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα supremum, maximum, infimum και minimum των A και B. (Δεν απαιτούνται εδώ αποδείξεις των ισχυρισμών σας.) 0,25 **(0.5μ)**

2. (i) Να δειχθεί ότι $\lim_n \frac{a^n}{n!} = 0$ για κάθε $a > 0$. (ii) Να δειχθεί ότι $\lim_n \sqrt[n]{n!} = +\infty$. 0,75 **(1.5μ)**

3. Αν A, B μη κενά φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ ώστε $\sup A = \inf B$ αποδείξτε ότι για κάθε $\delta > 0$ υπάρχουν $a \in A$ και $b \in B$ έτσι ώστε $b - a < \delta$. **(1μ)**

4. Έστω (a_n) *αύξουσα* ακολουθία πραγματικών αριθμών, (a_{k_n}) υπακολουθία της (a_n) και $a \in \mathbb{R}$. Αν $\lim\limits_n a_{k_n} = a$ δείξτε ότι $\lim\limits_n a_n = a$. **(1μ)**

5. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση, συνεχής στο x_o και $f(x_o) = 2$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $f(x) < \frac{9}{4}$ για κάθε $x \in (x_o - \delta, x_o + \delta)$. **(1μ)**

6. Δίδεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 2x^4$. Χρησιμοποιώντας τον (ϵ, δ) ορισμό, να αποδείξτε ότι είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 1$. **(1μ)**

7. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση ώστε $f(x)$ άρρητος για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή, διατυπώνοντας πλήρως τα θεωρήματα που θα χρησιμοποιήσετε. **(1.5μ)**

8. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και $x_1, x_2 \in [a, b]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ώστε $f(\xi) = \frac{1}{2}(f(x_1) + f(x_2))$. **(1.5μ)**

9. Έστω $X \subseteq \mathbb{R}, a \in X$ και $f : X \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι για κάθε ακολουθία (x_n) στοιχείων του X με $\lim_n x_n = a$ η ακολουθία $(f(x_n))$ συγκλίνει στο $f(a)$. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο a. **(1.5μ)**

10. Δείξτε ότι $\lim\limits_n n(\sqrt[n]{e} - 1) = 1$.

[Υπόδειξη: Αν $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ και $b_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ χρησιμοποιείστε (χωρίς απόδειξη) ότι $a_n < e$ και $e < b_n$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$.] **(1.5μ)**

Σημειώστε στην πρώτη σελίδα του γραπτού σας τους αριθμούς των θεμάτων που απαντήσατε (βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο αριθμό).
Μαζί με το γραπτό σας να παραδίδετε και τα θέματα.

Καλή επιτυχία!