Εξετάσεις του μαθήματος
«Απειροστικός Λογισμός Ι»
(17.1.2000)

Θέμα 1ο: Έστω ακολουθία (a_n), ώστε $\lim_n a_{3n} = \ell_0$, $\lim_n a_{3n+1} = \ell_1$ και $\lim_n a_{3n+2} = \ell_2$, με $\ell_0, \ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$.

i) Αν (a_{k_n}) είναι μία υπακολουθία της (a_n), ώστε $\lim_n a_{k_n} = \ell$, αποδείξτε ότι $\ell \in \{\ell_0, \ell_1, \ell_2\}$.

ii) Αποδείξτε ότι $\liminf a_n = \min\{\ell_0, \ell_1, \ell_2\}$ και $\limsup a_n = \max\{\ell_0, \ell_1, \ell_2\}$.

iii) Αποδείξτε ότι η (a_n) συγκλίνει αν και μόνον αν $\ell_0 = \ell_1 = \ell_2$ **(3)**

Θέμα 2ο: α) Έστω συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, ώστε για κάθε $y \in f([0,1])$ το σύνολο $\{x \in [0,1] : f(x) = y\}$ είναι δισύνολο. Αποδείξτε ότι η f δεν είναι συνεχής. **(2)**

β) Έστω ακολουθία (a_n) ώστε $\lim_n a_n = 0$. Αποδείξτε ότι αν $S_{2n} = a_1 + a_2 + \dots + a_{2n} \to \ell \in \mathbb{R}$ τότε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \ell$. **(1)**

Θέμα 3ο: α) Έστω $f : [0,1] \to [0,1]$ συνεχής και $a_0 \in [0,1]$. Θέτουμε $a_{n+1} = f(a_n)$ για $n = 0,1,\dots$. Αν $\lim_n a_n = \xi$ τότε αποδείξτε ότι $\xi \in [0,1]$ και $f(\xi) = \xi$. **(1,5)**

β) Να γραφεί λεπτομερώς η άρνηση του ισχυρισμού «$\lim_n a_n = 1$». **(1)**

Θέμα 4ο: Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \eta\mu \frac{5n}{n^3+1}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - n}$. **(2,5)**

Θέμα 5ο: α) Να βρείτε τα σημεία συνέχειας της συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με $f(x) = x + 2$ αν $x \in \mathbb{Q}$ και $f(x) = \frac{3}{2}$ αν $x \notin \mathbb{Q}$. **(1,5)**

β) να βρείτε τα sup και inf των συνόλων $A = \left\{\frac{1}{n} : n = 1,2,\dots\right\}$ και $B = \left\{5 - \frac{1}{n} : n = 1,2,\dots\right\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n = 1,2,\dots\right\}$. Είναι αυτά μέγιστα και ελάχιστα των αντιστοίχων συνόλων; **(1)**

Το άθροισμα των μονάδων είναι 13,5. Άριστα είναι το 10 και βάση το 5. Μπορείτε να γράψετε όποια θέματα θέλετε. Επίσης μπορείτε να χρησιμοποιήσετε, χωρίς να έχετε αποδείξει, μία ερώτηση για να απαντήσετε επόμενη ερώτηση του ιδίου θέματος. Σημειώστε οπωσδήποτε στην πρώτη σελίδα του γραπτού σας τους αριθμούς των θεμάτων τα οποία επιχειρήσατε.