Θεματα εξετασεων στο μαθημα Απειροστικος Λογισμος Ι
Ημερομηνια εξετασεων 1 - Σεπτεμβριου 1999

Θέμα 1° Εστω τα συνολα $\{x\in\mathbb{R} : x^2+x+1 \geq 0\}$, $\{x\in\mathbb{R} : x^2+x-1<0\}$ και $\{n\in\mathbb{N} : 1/n + (-1)^n\}$. Βρείτε το sup και το inf των παραπάνω συνόλων (αν υπάρχουν) και εξετάστε ποία από αυτά ανήκουν στα αντίστοιχα σύνολα (αιτιολογήστε πλήρως την απάντηση σας)

Θεμα 2° α) Εστω $A\subseteq\mathbb{R}$ φραγμενο. Θετουμε $a=\sup A$, $b=\inf A$. Δείξτε ότι αν $a\notin A$, ($b\notin A$) τοτε υπαρχει γνησιως αύξουσα (φθινουσα) ακολουθια $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχειων του A με $a_n \to a (b)$ β) Εστω $f:[\alpha,b]\to\mathbb{R}$ συνεχης συναρτηση. Θετουμε $A=\{x\in[\alpha,b] : f(x)=0\}$ Αν $A\neq\emptyset$ αποδείξτε οτι $\sup A\in A$ και $\inf A\in A$.

Θεμα 3° α) Εστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθια πραγματικων αριθμων και $a_n\to\alpha$. Αν υπαρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ωστε $a_n\leq b$ για κάθε $n\geq n_0$, αποδείξτε ότι $\alpha\leq b$.
β) Εστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών ωστε $a_{n+1}\leq a_n/2$ για καθε $n\in\mathbb{N}$. Αποδειξτε οτι για καθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $a_n<\varepsilon$ για καθε $n\geq n_0$.

Θεμα 4° α) Εξετάστε αν η συναρτηση $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=1/x$ είναι ομοιομορφα συνεχ.
β) Εστω $A\subseteq\mathbb{R}$ και συναρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ τετοια ωστε, $\forall\ \varepsilon>0$ υπάρχει $M>0$ ωστε αν $|(f(x)-f(y))/x-y|>M \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$. Αποδείξτε ότι η f είναι ομοιομορφα συνεχης.

Θεμα 5° α) Εστω $A\subset\mathbb{R}$ και $f:A\to\mathbb{R}$ συναρτηση. Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχ. στο $x_0\in A$ αν και μόνο άν για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του A με $x_n\to x_0$ συνεπαγεται $f(x_n)\to f(x_0)$. β) Εστω η συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με
$$f(x)=\begin{cases} x & \text{αν } x \text{ αρρητος} \\ 1-x & \text{αν } x \text{ ρητός}\end{cases}$$
Αποδείξτε ότι το μοναδικό σημείο συνεχειας της f είναι το $\frac{1}{2}$

Θέμα 6° α) Εστω $f:[\alpha,b]\to\mathbb{R}$ φραγμενη συναρτηση και f συνεχής στο (a,b). Αποδειξτε οτι η f ειναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,b]$
β) Αν $g:[\alpha,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη με πεπερασμένο πλήθος σημείων ασυνεχειας δειξτε οτι η g ειναι Riemann ολοκληρωσιμη.

(Να απαντηθουν 5 από τα 6 θέματα).